

Kristallversetzungen und Wachstum von Ätzgrübchen

VON WALTER RIESSLER

Mit 19 Textabbildungen

(Eingegangen am 16. April 1960)

1. Einleitung

Seit dem röntgenographischen Nachweis von EL, PFANN, COREY und THOMAS [1], daß gewisse Ätzen von Germanium entstehende Grübchen Versetzungslinien zugeschrieben werden können, sind über schon zahlreiche Arbeiten veröffentlicht worden. Viele der Autoren ([2] bis [6]) befassen sich mit der Anordnung dieser Grübchen, meist in Verbindung mit einer Messung der elektrischen Eigenschaften. Es lassen sich daraus Schlüsse auf Dichte und Verlauf der Versetzungen, sowie auf die Lage der Gleitebenen ziehen. Inzwischen sind solche Grübchen außer auf Germanium und Silizium auch auf anderen Stoffen, wie den Alkalihalogenuiden Lithiumfluorid und Natriumchlorid, wie auch auf Metallen wie Silber, Kupfer, bekannt geworden.

Neben der Ätzmethode wurden inzwischen auch andere Verfahren zum Erkennen von Versetzungen gefunden. So kann man Versetzungen mit Fremdstoffeinschlüssen dekorieren und diese mit Licht, für die betreffende Kristall durchlässig ist, beobachten (s. [7]). Bei Germanium versagt dies, weil die Durchlässigkeitsgrenze zu weit im Ultraroten liegt. RIESSLER und DASH konnten jedoch durch anschließendes Anätzen die markierten Versetzungen zum Vorschein bringen [8]. Andere Autoren bedienen sich des Röntgenstrahlungsfeldes, das sich röntgenographisch nachweisen läßt (BONSE und KAPPLER [9], BORRMANN [10]). Elektronenmikroskopisch konnte MENTER an bestimmten Kristallen Versetzungen direkt sehen [11]. Auch schon bei geringerer Auflösung lassen sich in dünnen Metallfolien Versetzungen erkennen [12], besonders eindrucksvoll mit Hilfe von Moiré-Effekten [13]. Praktische Bedeutung hat indes nur das Ätzen, das man erlangt, vor allem wegen seiner Einfachheit. Aus diesem Grunde erschien es lohnenswert, der Sache nachzugehen, wie diese Versetzungsgrübchen entstehen und ankommen. Es war zunächst daran gedacht, mit dem Elektronenmikroskop die feinere Struktur der Grübchen festzustellen, um daraus Schlüsse über den Mechanismus ihres Wachstums zu ziehen. Über den Einfluß der Zusammensetzung des Ätzmittels auf das Grübchenbild haben hier bereits GEIST und PREUSS [14] Untersuchungen angestellt. Auch an anderer Stelle wurden ähnliche Arbeiten vorgenommen worden ([15] bis [17]). Diese beschränken sich meist auf eine rein beschreibende, ohne für das Auftreten bestimmter Strukturen eine tiefergehende Erklärung zu geben. Es dürfte letzten Endes sehr schwierig sein wegen der komplizierten chemischen Teilprozesse, die dabei eine Rolle spielen. Es kann sich also zunächst nur darum handeln, vereinfachende Annahmen zu finden, um mit einem begrenzten Teil der Erscheinung aufzudecken. Die folgenden Untersuchungen wurden ausschließlich an Germanium vorgenommen.

2. Die Wirkung verschiedener Ätzmittel

Um einen Überblick über das Ätzverhalten von Germanium zu bekommen, wurden zunächst systematische Versuche angestellt mit fünf Ätzlösungen, die sich in ihren Eigenschaften möglichst weit voneinander unterscheiden. Es waren dies

1. Die CP 4-Lösung bestehend aus

- 3 Volumenteile Flußsäure 40%ig,
- 3 Volumenteile Essigsäure 96%ig,
- 5 Volumenteile Salpetersäure 41%ig,
- 0,1 Volumenteile Brom.

Diese Lösung wurde zuerst von HEIDENREICH angegeben und wird heute wohl am meisten verwendet, sowohl zum Blankätzen wie auch zum Sichtbarmachen von Versetzungslinien.

2. Die Superoxol- oder Hydroxol-Lösung

- 1 Volumenteil Flußsäure 40%ig,
- 1 Volumenteil Perhydrol 30 Gew.-% H_2O_2 ,
- 4 Volumenteile Wasser

hat den Vorteil angenehmerer Handhabung. Sie kann auf Vorrat angesetzt werden.

3. Die Kaliumferricyanid-Lösung

- 8 g Kaliumferricyanid ($K_3Fe(CN)_6$),
 - 12 g Kaliumhydroxyd,
 - 100 g Wasser,
- Anwendung bei Siedetemperatur.

Diese Lösung wird von BILLIG [6] zum Sichtbarmachen von Versetzungen auf der (111)-Fläche empfohlen. Sie läßt sich ebenfalls auf Vorrat ansetzen.

4. Die Ätzlösung „S 2“

- 45 Gew.-% Salpetersäure,
 - 10 Gew.-% Flußsäure,
 - 45 Gew.-% Wasser,
- 60 mg Silbernitrat auf 100 g Lösung

wurde von GEIST und PREUSS [14] unter Variation der Mengenverhältnisse aller vier Komponenten als diejenige ermittelt, welche zum chemischen Polieren von Germanium am besten geeignet ist. Die Ätzung erfolgt wegen des zugesetzten Schwermetalls sehr heftig. Der dabei auftretende Silberniederschlag muß hinterher entfernt werden.

5. Heiße konzentrierte Schwefelsäure.

Sie wurde als Vertreter solcher Ätzmittel untersucht, deren Angriff auf Germanium nicht gleichmäßig erfolgt. Man hätte ebensogut heiße konzentrierte Salpetersäure nehmen können. Bei Zimmertemperatur ist die Abtragung unbedeutend.

Die verwendeten Chemikalien hatten mindestens den Reinheitsgrad „reinst“ und wurden auf ihre Konzentration geprüft. Die Lösungen 1, 2 und 4 wurden

stets in Polyäthylengefäßen angesetzt und gehandhabt. Auf eine gleichmäßige Durchmischung aller Bestandteile wurde besonders geachtet. Es empfiehlt sich, vor der Anwendung einige Minuten zu warten.

Die Ätzbilder wurden jeweils auf den Orientierungen (100), (111) und (110) untersucht. Die drei Flächen wurden an demselben Kristall angeschliffen, so daß sie beim Ätzen immer den gleichen Bedingungen unterworfen waren. Orientiert wurde röntgenographisch auf 0,5° genau. Die mit Karborundum geschliffenen Flächen wurden mit CP 4 vorgeätzt, um die stark beschädigte Oberflächenschicht abzutragen und dann von Hand auf einer Pechschale optisch poliert. Nach der Ätzbehandlung wurde die Probe im Metallmikroskop bei Hellfeldbeleuchtung untersucht. Der Kristall war mit Versetzungslinien verschiedener Richtung sowie

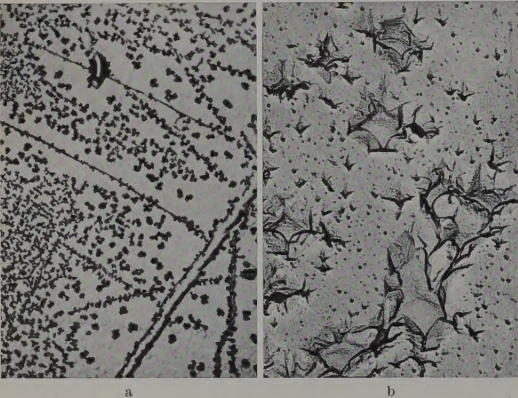


Abb. 1 a u. b. Ätzangriff von heißer konzentrierter Schwefelsäure auf Germanium. Die entstehenden Vertiefungen sind unabhängig von den Versetzungslinien. a Lichtmikroskopisch (Vergr. 170fach); b elektronenmikroskopisch (Vergr. 11000fach)

mit einigen Kleinwinkelkorngrenzen durchsetzt. Um einen Vergleich zwischen der Wirkung der einzelnen Ätzlösungen zu haben, wurden stets dieselben Stellen aufgesucht und photographisch festgehalten. Zunächst fällt das grundsätzlich andere Verhalten der heißen Schwefelsäure auf. Diese greift, wie Abb. 1 zeigt, vollkommen ungleichmäßig an, ohne sich um die Flächenorientierung, Beschaffenheit des Germaniums und Versetzungslinien zu kümmern¹. Die Vertiefungen beginnen vielfach an Polierriefen und äußeren Verunreinigungen und dehnen sich schließlich über die ganze Oberfläche aus. Ätzmittel dieser Art wurden nicht weiter untersucht. Die Eigenschaften der anderen Lösungen sind in der Übersicht Tabelle 1 zusammengefaßt. Die beobachteten Erscheinungen lassen sich wie folgt einteilen.

1. Mulden, die anfangs entstehen und bei fortschreitender Ätzung langsam flacher werden oder ganz verschwinden. Diese werden durch die beim Vorbehandeln beschädigte Oberflächenschicht verursacht. Sie treten nicht auf, wenn man von bereits vorgeätztem Material ausgeht. Sie werden manchmal ganz oder teilweise von Facetten begrenzt.

2. Mulden, die beim Weiterätzen nicht verschwinden, ebenfalls konkav oder mit Facetten.

¹ Die von GEIST und PREUSS [14] beobachteten Versetzungsgrübchen nach Schwefelsäureätzung waren nicht wiederzufinden. In Übereinstimmung mit den Autoren sind sie auf die Vorätzung zurückzuführen.

Tabelle 1

Ätzmittel und Orientierung	Aussehen der Oberfläche	Versetzungen	Bemerkungen
CP 4	(100)	Mulden (etwa 30 μ groß), die flacher werden und oft ganz verschwinden; Kratzer weiten sich aus	treten als flache Kegel hervor, die größer werden
	(111)	etwas größere Mulden (etwa 40 μ); Kratzer weiten sich aus	treten als Kegel hervor, die größer werden
	(110)	Oberfläche bleibt fast glänzend; leichte Körnung; Kratzer verschwinden rasch	es treten kleine, flache Hügel, die in [110] richtet sind (etwa 5 μ l. (Abb. 2))
Superoxol	(100)	flache Mulden (5 bis 15 μ), die dazu neigen, quadratischen Grundriß anzunehmen; Kanten in [011]; Kratzer weiten sich aus	treten als Kegel schwach und oft unvollständig hervor
	(111)	flache Mulden (etwa 20 μ); vereinzelt Mulden mit dreieckigem Grundriß; Kratzer weiten sich aus	treten als Kegel hervor
	(110)	erscheint nach längerem Ätzen infolge Hügelbildung aufgeraut	es treten etwa 10 μ g. Hügel als tige Pyram auf (Abb. 3)
Kaliumferricyanid-Lösung	(100)	Fläche bleibt zunächst plan; höchstens äußerst flache Mulden (einige mm groß, wenige μ tief); Vertiefungen werden zu Karos ausgeweitet; Kratzer verbreitern sich nur wenig	treten nicht hervor
	(111)	sehr flache Mulden, (etwa 30 μ groß); Kratzer weiten sich aus	treten deutlich als dreiseitige, pyramidenförmige Vertiefungen auf (Abb. 4)
	(110)	Fläche wird leicht wellig; Kratzer verbreitern sich schwellenförmig	verursachen schiffchenförmige Vertiefungen (Abb. 5)
S 2	(100)	flache Mulden, die teilweise in [011]-Richtung orientiert sind	treten nur schwach und unvollständig hervor
	(111)	zunächst flache Mulden (etwa 50 μ), die dann verschwinden	werden sehr deutlich als Kreiskegel sichtbar
	(110)	vollkommene Ein-ebnung der Oberfläche; Kratzer werden ausgeweitet und verschwinden rasch (Abb. 6)	treten nicht hervor

Grübchen mit einer Spitze, die von Versetzungsrändern herühren. Sie haben die Form eines flachen Kegels oder die einer drei- oder mehrseitigen Pyramide. Korngrenzen, gekennzeichnet durch Aneinanderreihung von Versetzungsgrübchen. Oft sind sie so benachbart, daß sie nicht mehr aufgelöst werden können. Hügelbildung auf der (110)-Fläche. Nur in den wenigsten Fällen entsteht beim Ätzen eine ebene Fläche, auch wenn man von einer Ebene ausgeht. Das braucht nicht unbedingt auf einer Inkongruenztät des Materials beruhen.

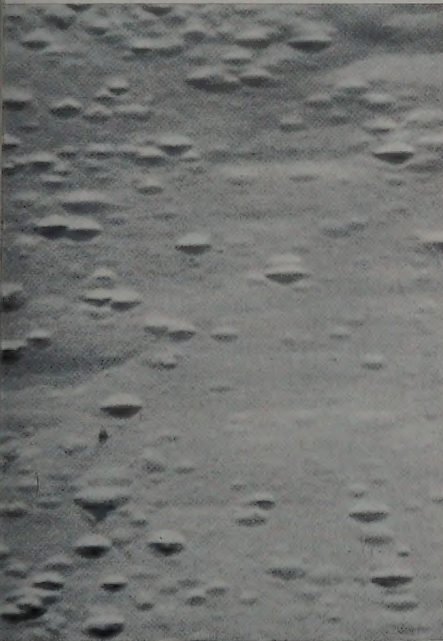


Abb. 2. Hügel auf der (110)-Fläche nach CP4-Ätzung (Vergr. 950fach)

3. Die Geometrie der Ätzfiguren

Im Anschluß an BATTERMAN [20] wird nun versucht, für die Hügel- und Grübchenbildung die Orientierungsabhängigkeit der Ätzgeschwindigkeit verantwortlich zu machen. Der Autor betrachtet speziell die (110)-Fläche beim Ätzen mit Superoxol entstehenden 6seitigen Pyramiden. Für die Stabilität einer Pyramidenfläche h , die mit der Grundfläche g zusammenstößt, werden dort zwei Bedingungen angegeben:

$$w_h / \cos \alpha < w_g$$

oder $w_h > w_n$ bzw. $w_h < w_n$, wenn h mit einer Nachbarkante n eine Außen- bzw. Innenkante bildet. In beiden Fällen werden nachfolgend kurz mit „konvex“ bzw. „konkav“ bezeichnet.) w_g , w_h und w_n dabei die Ätzraten von g , h und n , α der Neigungswinkel gegen g . Die beiden Bedingungen entsprechen mit der gemessenen Richtungsabhängigkeit der Ätzrate w als stabile Pyramidenflächen (322)-Orientierungen, welche zugleich eine singuläre Stellung als Stützpunkte auf der Ätzgeschwindigkeitsfläche haben. Die hier vorliegende Untersuchung zeigt, daß die hier Forderung den Sachverhalt nur roh wiedergibt,

während die erste durch eine Zusatzbedingung ergänzt werden muß. Dann gelingt es auch für alle Pyramidenflächen eine Erklärung zu geben.



Abb. 3. Hügel auf der (110)-Fläche nach Superoxol-Ätzung (Vergr. 550fach)

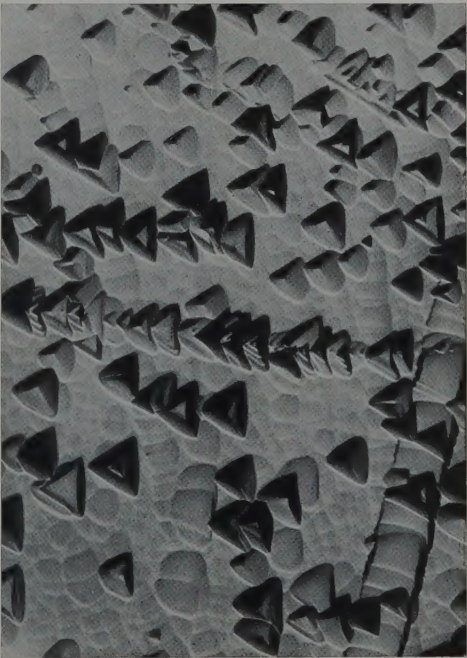


Abb. 4. Versetzungsgrübchen auf (111) nach Ätzung mit Kaliumferricyanid-Lösung (Vergr. 300fach)

Zwei Ebenen mit den Ätzraten w_1 und w_2 , die unter dem Winkel α aneinanderstoßen, werden nach einer Zeiteinheit neue Lagen eingenommen haben, die

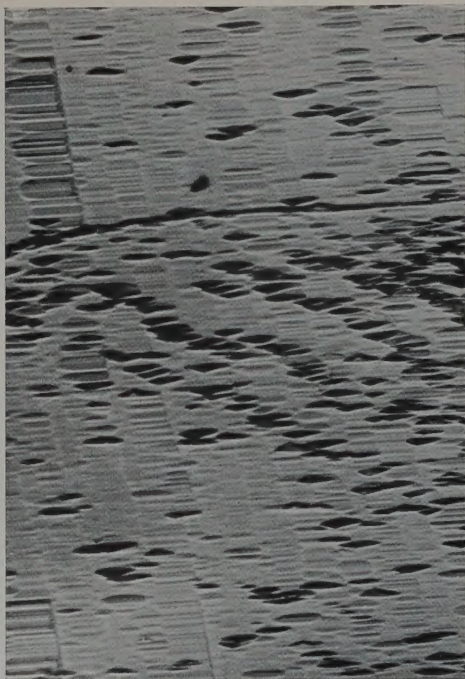


Abb. 5. Versetzungsrückchen auf (110) nach Ätzen mit Kaliumferricyanid-Lösung (Vergr. 320fach)



Abb. 6. Einbebnung der (110)-Fläche durch S2 (Vergr. 350fach)

von den alten um w_1 und w_2 entfernt sind. Wenn die Schnittkante scharf erhalten bleibt, wird sie sich um den Vektor \mathfrak{S} weiterbewegt haben (Abb. 7a). Die Kante darf man jedoch im Ausgangszustand nicht ganz scharf annehmen, sondern sie wird bei hinreichend

starker Vergrößerung zylinderartig abgerundet. Man muß sich diese Zylinderwandung durch eine Anzahl von Ebenen ersetzt denken. Für den pflanzungsvektor \mathfrak{s} zweier infinitesimal benachbarten Ebenen entnimmt man aus Abb. 7b

$$s = |\mathfrak{s}| = \frac{w}{\cos \beta} = \frac{w + w' d\alpha}{\cos(\beta - d\alpha)}.$$

Daraus folgt

$$s = \sqrt{w^2 + w'^2}; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{w'}{w}.$$

Man kann also jedem Flächenelement einen charakteristischen Vektor \mathfrak{s} zuordnen, der die Richtung gibt, in der es sich fortbewegt. Ein solcher Vektor existiert auch bei einer zweidimensional gekrümmten Fläche, wie man in ähnlicher Weise zeigen kann.

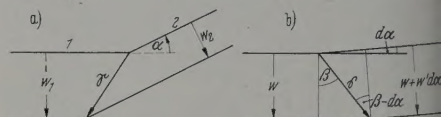


Abb. 7a u. b. Verschiebung der Schnittkante zweier Ebenen a) bei endlicher, b) bei infinitesimaler Neigung

Zeichnet man die Schnittkanten abgerundet und auf allen Flächenelementen ihre zugehörigen charakteristischen Vektoren \mathfrak{s} auf, so kann man zwei Ebenen unterscheiden. Überschneiden sich die Vektoren (oder ihre Verlängerungen) auf der Seite des nicht abgetragenen Materials, so wird die Kante scharf bleiben. Überschneiden sie sich auf der anderen Seite, so wird sie sich dagegen weiter ausrunden, gilt sowohl für konvex, als auch für konkave Kanten. Die Wahrscheinlichkeit, daß Ausrundung eintritt, ist bei konkaven Kanten größer. Das ist sicher auch der Grund, warum die Hügelbildung selten ist. Bei einem Eckpunkt, dem Schnittpunkt dreier Ebenen verhält es sich analog. Die Basisvektoren e_1, e_2, e_3 eines senkrechten Koordinatensystems parallel den Kantenrichtungen seien so definiert, daß gilt

$$\frac{(e_1 e_2 e_3)}{|[e_1 e_2]|} = w_3 = \frac{1}{|e^3|}$$

und zyklisch. Die Vektoren e^i des reziproken Systems stehen auf den Ebenen senkrecht und haben den Betrag $1/w_i$. Die Verschiebung \mathfrak{S} des Eckpunktes ist dann

$$\mathfrak{S} = e_1 + e_2 + e_3.$$

Nun sei der Sonderfall betrachtet, daß die Grundfläche (welche den Index 3 haben soll) eine Symmetrieebene, also eine Ebene mit minimaler oder maximaler Ätzgeschwindigkeit ist und die Versetzungslinie senkrecht darauf steht. Die sich ausbildende Ätzfigur verschiebt sich senkrecht der Grundfläche e^3 verschieben dabei ähnlich größer werden, ohne sonst die Grundfläche zu ändern. Eine zur Spitze eines Hügels oder einer Versetzungsrückchens gehende Kante e_3 darf sich in einer Ebene senkrecht zu e^3 bewegen. Das Skalarprodukt $(\mathfrak{S} e_3 e^3)$ muß daher verschwinden. Man bekommt man hieraus

$$(e^1 e^3) = (e^2 e^3)$$

oder

$$\frac{w_1}{\cos \alpha_{13}} = \frac{w_2}{\cos \alpha_{23}},$$

mit α_{13} und α_{23} die Winkel sind, die die Ebenen der orientierten Kante mit der Grundfläche bilden. Zu den Hügeln oder Grübchen können daher nur solche gehören oder Flächenelemente gehören, die denselben

$$K = w(\alpha)/\cos \alpha = \text{const} \quad (3)$$

Abb. 8 zeigt ein Ätzgrübchen einer auf der Grundfläche senkrecht stehenden Versetzungslinie im Schnitt, indem von der Grundfläche w_0 abgetragen wurde. Der Vorgang ist analog der Bildung des Mach-Kegels in der Aerodynamik in einem fiktiven anisotropen Medium. Man erkennt, daß K identisch ist mit der Ätzgeschwindigkeit v_z , d.h. der Ätzgeschwindigkeit längs des Zentrums der Versetzungslinie. Für die radiale Wachstumsgeschwindigkeit hat man

$$v_r = (v_z - w_0) \cotg \alpha. \quad (4)$$

Die Grundfläche (100) oder (111), so kann man annehmen schreiben

$$w(\alpha) \approx w_0 (1 + \kappa \alpha^2) \quad (5)$$

erhält man dann aus Gl. (3) und (4)

$$v_r = w_0 (\kappa + \frac{1}{2}) \alpha. \quad (6)$$

Kanten gegen die Grundfläche sind bei positivem κ . Bei Flächen mit minimaler Ätzgeschwindigkeit ist κ negativ, wie man aus der Richtung der Vektoren \vec{v} erkennt.

Für die experimentelle Prüfung dieser Vorstellungen wurde erst die Richtungsabhängigkeit der Ätzgeschwindigkeit von CP 4 bei 98°C und von Kaliumferricyanidlösung bei 98°C gemessen. Dazu dienten zwei Gerumzylinder mit Achsen in [100] und [111]-Richtung. Dieselben wurden nach dem Ätzen erst vorgeätzt und dann vor und nach der Ätzung mit einem optischen Tiefenmesser gemessen. Zu diesem Zweck wurden sie drehbar auf eine horizontale Achse montiert, die mit einem Teilkreis versehen war, an dem die Flächenorientierung abgelesen werden konnte. Abb. 9 zeigt den Mittelwert der gewonnenen Kurven zusammen mit den Kurven von BATTERMAN für Superoxol. Allen Kurven gemeinsam ist das relative Minimum bei 90°. Mit Hilfe dieser Diagramme wurde die Form der Hügel auf (110) bei Superoxol und CP 4 sowie die der Versetzungsgrübchen der Kaliumferricyanidlösung auf der (111)-Fläche abzuleiten¹. Zunächst werden in der stereographischen Projektion der Grundfläche als Pol die Kurven konstanter Ätzgeschwindigkeit eingetragen, wie man sie nach der Abb. 9 zu erwarten kann und dann die Linien mit konstantem $w(\alpha)/\cos \alpha$ gezeichnet. Ist h die Höhe des Hügels bzw. die Tiefe eines Grübchens, so besitzt ein Flächenelement der Neigung α eine Kante der Grundfläche im Abstand $h \cdot \cotg \alpha$. Man hat

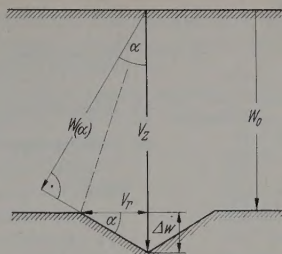


Abb. 8. Zusammenhang zwischen v_z und α eines Versetzungsgrübchens bei Rotationssymmetrie

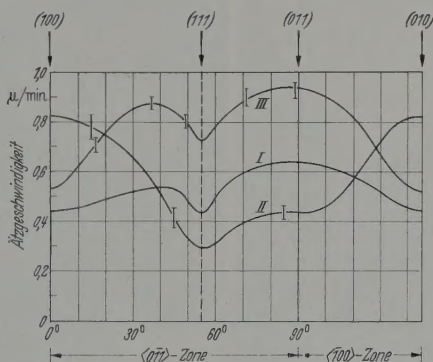


Abb. 9. Orientierungsabhängigkeit der Ätzgeschwindigkeit von Germanium bei verschiedenen Ätzlösungen. I Superoxol nach BATTERMAN [20]; II Kaliumferricyanidlösung bei 98°C; III CP 4. Der Ordinatenmaßstab ist bei CP 4 mit dem Faktor 20 zu multiplizieren

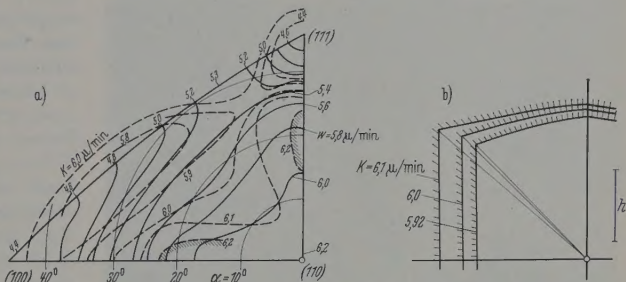


Abb. 10 a u. b. Graphische Konstruktion der 6seitigen Pyramiden auf (110) nach Superoxol-Ätzung. a) Linien konstanter Ätzgeschwindigkeit w und Linien mit konstantem $K = w_0/\cos \alpha$ (gestrichelt); b) daraus ermittelte Hügelformen für drei K -Werte (s. Text)

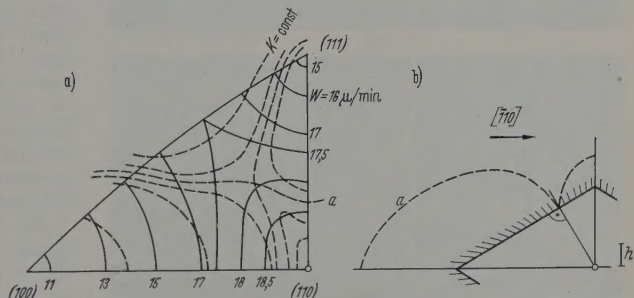


Abb. 11 a u. b. Konstruktion der 4seitigen Pyramiden auf (110) nach CP 4-Ätzung

Während der Drucklegung wurde hier eine Arbeit von G. IRVING bekannt, die sich ebenfalls mit den Superoxolhügeln befasst. [IRVING, B. A.: J. Appl. Phys. 31, 109 (1960).]

daher auf allen Fahrstrahlen einer K -Kurve, bei Hügeln in gleicher, bei Grübchen in entgegengesetzter Richtung die Strecke $h \cdot \cotg \alpha$ abzutragen und im Endpunkt das Lot zu errichten. Die Einhüllende aller Lote stellt den möglichen Grundriß einer Pyramide, bzw. eines Versetzungsgrübchens dar. Es kann vor-

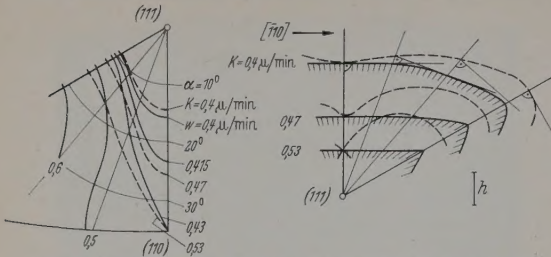


Abb. 12. Konstruktion der 3seitigen Versetzungsgrübchen auf (111) nach Ätzung mit Kaliumferriyanidlösung

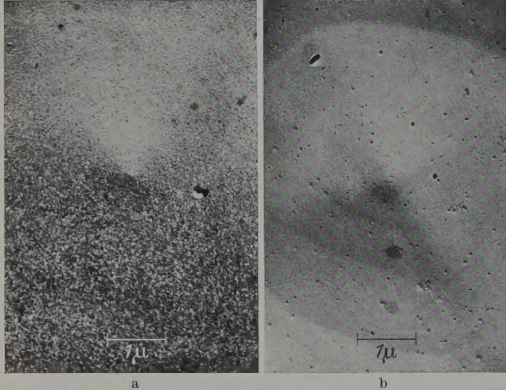


Abb. 13 a u. b. Elektronenmikroskopische Aufnahmen zweier Versetzungsgrübchen. a Mit scharfer, b mit abgerundeter Spitze. Präparation: Kohlehäutchen a mit Chrom, b mit Molybdän beschattet

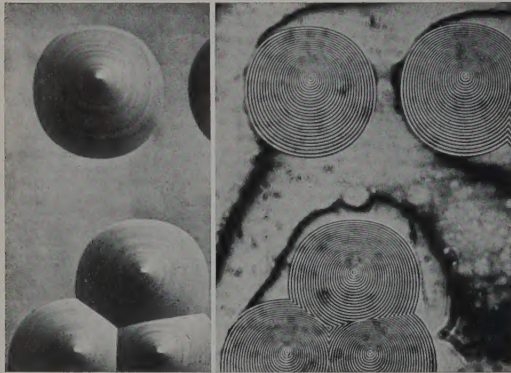


Abb. 14

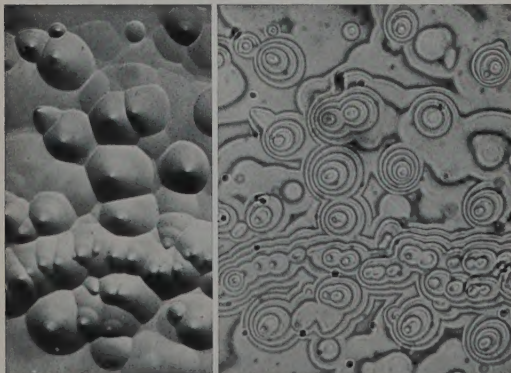


Abb. 15

Abb. 14 u. 15. Verschiedene Kegelminkel bei Versetzungsgrübchen auf (100) nach CP4-Ätzung bei zwei verschiedenen Kristallen zusammen mit ihren Interferenzaufnahmen (Vergr. beidesmal 200fach)

kommen, daß sich diese Einhüllenden überschneiden. Dann ist nur der innere Teil der Figur zu betrachten. Man erkennt auch, daß nur solche K -Kurven in Betracht kommen, die den Pol umschließen und deren kleiner bzw. größer als die Ätzgeschwindigkeit der Grundfläche ist.

In den Abb. 10, 11 und 12 ist die Konstruktion der genannten drei Beispielen durchgeführt. Die Übereinstimmung mit den Beobachtungen (Abb. 3, 2) ist befriedigend. Auch in anderen Fällen kann sich auf diese Weise die Form der Ätzfiguren berechnen. So sind bei CP 4 um (100) und (110) w -Linien nahezu kreisförmig. Daher müssen die Versetzungsgrübchen nahezu Kreiskegel sein. Abweichung davon ist erst bei steileren Grübchen zu erwarten. Doch mögen die angeführten Beispiele genügen, um zu zeigen, daß man mit einer orientierungsabhängigen Ätzgeschwindigkeit auskommt, um die Erscheinungen auf geätztem Germanium zu erklären. Bei Hügeln braucht man zusätzlich auch kleine Bereiche, wo der Ätzangriff für einige Zeit gehalten wird; bei Grübchen sind es die Versetzungslinien, längs deren die Ätzung mit erhöhter Geschwindigkeit stattfindet. Um die Zentralätzgeschwindigkeit v_z bestimmen zu können ist es notwendig, die Form der Versetzungsgrübchen genau auszumessen.

Elektronenmikroskopische Untersuchungen sind sehr erschwert, da die Vertiefungen meistens zu flach sind und daher bei Metallbeschattung auch bei kleinem Winkel nur wenig Kontrast geben. Es haftet, im Gegensatz zu poliertem Germanium, auf einer geätzten Germaniumoberfläche ein Häutchen aus Kohle, Kollodium, Formvar und anderen organischen Stoffen so fest, daß es so gut wie nie gelöst werden kann. Es ist daher notwendig, es mit Hilfe von Metallmatrizen abzulösen. Bei mehrstufigen Abdrücken werden die Vertiefungen verloren. Bewährt hat sich schließlich ein Verfahren, bei dem ein in einem Vakuum aufgedampftes Kohlehäutchen, das in einer stark verdünnten Superoxolätzlösung langsam schwimmt und sich auf Netzblenden auffischen lässt. Zum Beschatten nimmt man besser Molybdän oder Wolfram, da dieses nicht so leicht körnig wird. Bei den meisten kegelförmigen Grübchen findet man, wenn man die Spitze mit einer scharfen Spitze (Abb. 13a), den Krümmungsradius der Spitze beträgt dann weniger als $0,05 \mu$. Neben diesen findet man aber auch Versetzungsgrübchen, deren Spitze deutlich abgerundet ist (Abb. 13b). Manchmal bereits lichtmikroskopisch erkennbar. Dieser Befund wurde zunächst hingenommen. Eine Unsymmetrie, welche auf eine Orientierung der Ätzgeschwindigkeit von den elastischen Spannungen schließen ließe, konnte in keinem Fall festgestellt werden.

Die genaue Form eines Grübchens läßt sich am besten interferenzoptisch ausmessen. Die Abb. 14 und 15 zeigen Ätzgrübchen auf (100) bei zwei Kristallen verschiedener Herkunft nach CP 4-Behandlung zusammen mit ihren Interferenzbildern bei 5400 Å. Der Vergrößerungsmaßstab ist beidesmal der gleiche. Sofort auffallend ist die unterschiedliche Tiefe und Steilheit. Die Ergebnisse einiger Proben, die so untersucht wurden, sind in der Tabelle 2 zusammengefaßt. $\bar{\alpha}$ ist der mittlere Böschungswinkel einer Grübchenfläche. $\Delta w/w_0 = (v_z - w_0)/w_0$ ist der relative

Unterschied der Ätzgeschwindigkeit längs der Ver-
zugslinie gegenüber w_0 . Er wurde berechnet mit
den Formeln (4) und (6) und $\kappa=2,6$. Nieder-
ge Proben, d.h. solche mit höherem Fremdstoff-
gehalt, zeigen meistens steilere Kegel. Der Wert von

Tabelle 2

Spezifischer Widerstand $\Omega\text{ cm}$	Leitfähigkeits- Typ	Mittlerer Böschungswinkel α	$\Delta w/w_0$
0,5	n	$5,6^\circ$	3,0%
10	n	$3,2^\circ$	1,0%
0,6	p	$5,7^\circ$	3,1%
0,6	p	$6,4^\circ$	3,9%
5	p	$7,7^\circ$	5,7%

w_0 ist nicht einheitlich und offenbar eine charak-
teristische Größe der Versetzung. Um dies genauer zu
prüfen, wurde ein und derselbe Kristall unter drei
verschiedenen Neigungen β gegen (100) angeschliffen
und geätzt. Dadurch wird der Grundriß der Grübchen
nicht mehr rotationssymmetrisch. Die Versetzungen
sind bereits mit einem Winkel δ gegen die [100]-
Richtung geneigt, wodurch die Auswertung etwas
erschwert war. Liegen Flächennormale, [100]-Richtung
und Versetzungslinie in einer Ebene und sind α_1 und α_2
die Böschungswinkel in dieser Ebene, so findet
man in erster Näherung

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = -\beta + \frac{1}{2\kappa + 1} \delta. \quad (7)$$

Die Neigung der Oberfläche verursacht also eine viel
größere Exzentrizität als eine Neigung der Versetzungs-
linie.

Für das Verhältnis Grübchentiefe zu abge-
tragener Schichtdicke bekommt man angenähert

$$\frac{\Delta w}{w(\beta)} = \left(\kappa + \frac{1}{2}\right) \alpha_1 \alpha_2. \quad (8)$$

Die Abtragtiefe $w(\beta)$ auch direkt zu messen, wurde
nicht möglich, weil ein kleiner Bereich vor dem Ätzen mit Pizein
abgedeckt. Tabelle 3 gibt die Meßwerte an:

Tabelle 3

Neigung β der Oberfläche gegen (100)	$-8,0^\circ$	$-4,4^\circ$	$-1,0^\circ$
Neigung der Mantellinien $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \right.$	$12,4^\circ$ $3,1^\circ$	$8,05^\circ$ $6,75^\circ$	$6,05^\circ$ $10,2^\circ$
Abtragtiefe $w(\beta)$ in μ	51	43	64
Grübchentiefe Δw in μ	3,3	3,2	5,8
α_2	$7,8^\circ$	$7,4^\circ$	$8,1^\circ$
α_1	$4,65^\circ$	$0,65^\circ$	$-2,1^\circ$
nach Gl. (7)	$-21,0^\circ$	$-23,6^\circ$	$-19,5^\circ$
nach Gl. (8)	3,7%	5,2%	5,9%
w gemessen	6,5%	7,5%	9,0%

Man findet also im Rahmen der Meßgenauigkeit,
daß der mittlere Kegelwinkel $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ und der Winkel δ
konstant bleibt. Form und Lage der Ätzkegel sind
aber relativ zum Kristall fest und unabhängig von
der Orientierung der zur Beobachtung benutzten
Mittelebene. Dasselbe gilt dann auch für die Zentral-
ätzgeschwindigkeit v_z . Die gemessenen Ätztiefen

stimmen allerdings weniger gut mit den Erwarteten
überein, was sicher auf die Ungenauigkeit der Meß-
methode zurückzuführen ist.

Im Anschluß sei noch eine graphische Konstruk-
tion angegeben, die die Verhältnisse anschaulich
macht. Man trage von
einem festen Punkt P
aus nach allen Richtun-
gen die charakteristische
Ätzgeschwindigkeit \tilde{v} auf
oder, was dasselbe ist,
man konstruiere die Ein-
hüllende H aller ebenen
Ätzfronten nach der
Zeiteinheit, die zum
Zeitpunkt Null durch P
gingen (Abb. 16). In der
Nähe der (100)-Ebene
ist dies eine Kugelfläche
mit dem Radius $R = w_0(1 + 2\kappa)$. Die Versetzungs-
linie stellt darin einen Vektor der Länge v_z und
dem Endpunkt Q dar. Das Ätzgrüben wird dann
gebildet durch alle Geraden g durch Q , welche die

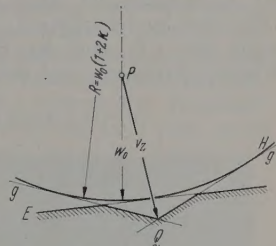


Abb. 16. Bedingungen für das Ent-
stehen eines Versetzungsgrübens
veranschaulicht (s. Text)

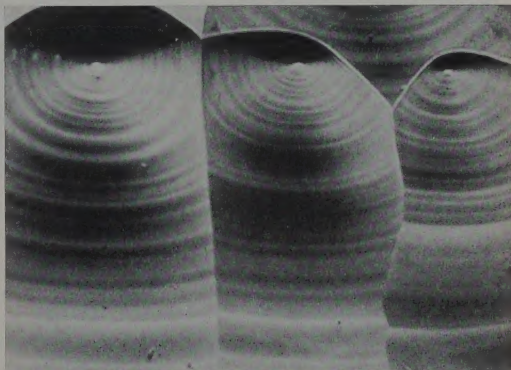


Abb. 17. Terrassenförmige Feinstruktur von Versetzungsgrüben
(Vergr. 400fach)

Fläche H berühren. Die Oberfläche E der Umgebung
ist eine Tangentialebene von H . Man kann aus der
Figur alle interessierenden Größen ablesen und er-
kennt auch die Bedingungen unter denen ein Grübchen
auftreten kann.

Im allgemeinen entstehen auf derselben Fläche
immer nur gleichartige Versetzungsgrüben. Es
werden aber auch Ausnahmen gefunden. So konnten
in der Mitte eines Kristalles — vermutlich als Folge
innerer Spannungen beim Ziehen — deutlich zwei
Gruppen von Versetzungsgrüben unterschieden
werden, deren Böschungswinkel sich etwa wie $\sqrt{2}:1$
und deren Tiefen etwa wie $2:1$ verhielten.

Bemerkenswert ist ferner die terrassenförmige
Feinstruktur die häufig gefunden wird (Abb. 17). Es
handelt sich hier um konvex gekrümmte Ringe, die
sich, von der Versetzungslinie ausgehend, mit dem
Kegelgrundriß ausdehnen. Als Ursachen kommen nur
kleine sprungartige Verschiebungen der Versetzungs-
linie oder, was wahrscheinlicher ist, ungleichmäßige
Anlagerung von Fremdstoffen längs derselben in
Frage. Man kann vielleicht sagen, daß solche Fremd-
stoffe die erhöhte Zentralätzgeschwindigkeit direkt

beeinflussen oder sogar verursachen. Da die Schwan-
kungen des Kegelwinkels sehr klein sind gegenüber
dem Böschungswinkel α , kann man leicht Aussagen
machen über die ihnen zugrunde liegende Verteilung
der Störungen auf der Versetzungslinie, indem man
die Flächenelemente längs ihrer charakteristischen
Vektoren \vec{s} zurückprojiziert. Für $\alpha = 6^\circ$ und $\kappa = 2,6$
ergibt sich z.B. nach den Gln. (1) und (5) für den
Winkel τ zwischen \vec{s} und der Versetzung

$$\tau = \alpha + \arctg \frac{w'}{w} = 35^\circ.$$

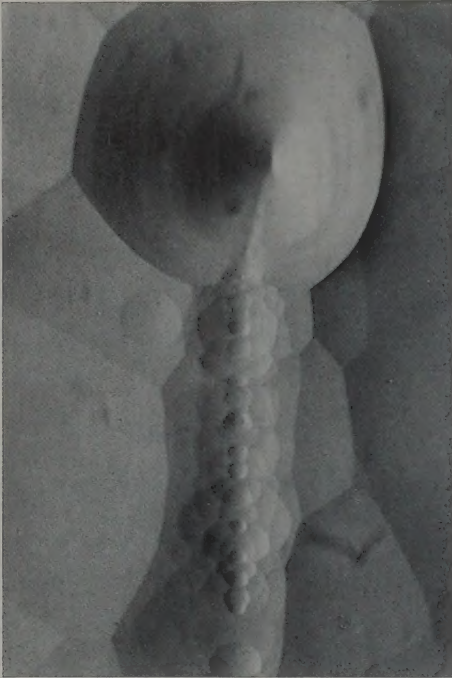


Abb. 18. Versetzungsgrübchen, begleitet von flachen Mulden
(Vergr. 400fach)

Ferner findet man bei Rotationssymmetrie und kleinen
Winkeln ganz allgemein, daß genau die untere Hälfte
der abgetragenen Versetzungslinie auf den Kegel-
mantel abgebildet wird.

Es gibt aber auch Erscheinungen, die sich nicht
allein als Folgen einer orientierungsabhängigen Ätz-
geschwindigkeit erklären lassen. Dazu gehört die
Beobachtung, daß Versetzungsgrübchen nach langem
Ätzen nicht beliebig groß werden, sondern am oberen
Rand verflachen. Ferner macht sich bei *n*-Material
oft der Mangel an Defektelektronen bemerkbar. Das
führt z.B. dazu, daß an der Grenze einer abgedeckten
Stelle die Abtragung rascher erfolgt. Ein chemisches
Ätzmittel besteht aus einem Oxydationsmittel, das
die erforderlichen Defektelektronen liefert und einem
Komplexbildner, der für den Abbau der Germanium-
atome sorgt [21], [22], [23]. Man kann sich denken,
daß örtliche Potentialunterschiede auftreten, so daß
beide Reaktionen räumlich getrennt verlaufen und
somit auch örtliche Ätzgeschwindigkeitsschwankungen
verursachen können. Auch können Diffusions- oder
Konvektionsvorgänge unterschiedlich sein und Zu-
führung der Ionen oder Abtransport der Abbau-

produkte lokal verschieden beeinflussen. Auch
Temperaturschwankungen ist zu denken.

Neben den Versetzungsgrübchen findet man st.
Ätzmulden mit flachem Boden, die unter Umständen
(z.B. bei Superoxol) ebene Seitenflächen bekommen
können. Nach langem Vorätzen ist man sicher,
diese Mulden nicht mehr von der mechanischen O-
flächenvorbehandlung herrühren, sondern auf Stör-
rungen im Kristallinneren zurückzuführen sind. Die
Mulden sind zuerst punktförmig, weiten sich aus und
werden flacher, bis sie verschwinden. Dafür treten
neue auf. Ihre Gesamtzahl bleibt ziemlich konst.
und ist nur abhängig von der Art des Kristalls. Ab-
fallend war das Aussehen einer *p*-Probe auf (100).
5,6 Ωcm spezifischem Widerstand. Nach der CH-
Behandlung war ein Teil der Oberfläche mit steilen
Versetzungsrübchen bedeckt, aber sonst frei von
Struktur, während der übrige Teil frei von Ver-
setzungsgrübchen und dicht mit kleinen Mulden über-
zogen war. Die naheliegende Deutung ist, daß die Mul-
den von Fremdstoffausscheidungen hervorgerufen wer-
den. Wo Versetzungen vorhanden sind, haben sich
Fremdatome an diesen angelagert. Dazu kam noch
eine weitere Beobachtung. Einige der Versetzungen wa-
ren in ihrer Gleitebene einseitig von einer Reihe sol-
cher Mulden begleitet (Abb. 18). Diese „Fahnen“ ver-
schwand auch nicht beim Weiterätzen. Man kann dem-
nach annehmen, daß die Versetzungslinie beim Wachstums-
prozeß gewandert ist, nachdem sie Fremdstoffe
gesammelt hatte. Die Fremdatome hatten aber nicht
genügend Zeit ihr zu folgen.

Wenn es wirklich nur punktförmige Ausscheidun-
gen sind, so kann man aus der Muldendichte m die
räumliche Dichte N_p der Ausscheidungen abschätzen

$$N_p = m^{\frac{1}{3}}.$$

Nun kennt man aber aus elektrischen Messungen
das Verhalten einiger Schwermetallatome im Germanium
verhältnismäßig genau. Überschreitet der Metall-
gehalt die Löslichkeitsgrenze, so wird sich das ü-
berschüssige Metall, sofern es Zeit genug hat, an einzel-
nen Keimpunkten ausscheiden und sich nicht mehr elek-
trisch bemerkbar machen. Von TWEET wurde die
Prozeß der Auflösung und Abscheidung von Kupfer
experimentell verfolgt [24]. Hier bietet sich nun die
Möglichkeit an, diesen Vorgang optisch zu verfolgen,
auch bei Stoffen, die sich elektrisch nicht so einfach
nachweisen lassen, unter der Voraussetzung freilich,
daß obige Vorstellung der Muldenentstehung richtig ist.

Um das zu prüfen wurde nach Auszählen der
Muldendichte und interferometrischen Abschätzung
der Muldentiefe, die Probe auf 890°C getempert
und abgeschreckt. Die für diese Versuche erforderlichen
Temperaturen und Zeiten wurden aus der Arbeit von
TWEET entnommen, so als ob es sich um Kupfer han-
delt. Die Probe wurde in einem Quarzrohr unter
Wasserstoff geglüht und dann mitsamt dem Rohr
selben in Wasser getaucht (Abschreckzeit unter 30 s).
Nach Polieren und Ätzen waren, wie erwartet, keine
Mulden mehr zu finden. Nach einem Anlassen auf
 475°C traten die Mulden wieder auf. Alle Ergebnisse
sind in Tabelle 4 zusammengestellt, ergänzt durch die
Abb. 19a—c.

Die Form einer Mulde kann man zeitlich zurück-
extrapolieren und gelangt dann etwa zu einer Kugel,
deren Durchmesser gleich der Muldentiefe t ist.

= 10^{-5} cm schließt man auf ein Kugelvolumen ungefähr $5 \cdot 10^{-16}$ cm³. Diese Kugel kann man durch eine erhöhte Ätzrate in kurzer Zeit entsenken. Andererseits haben sich beim Temperatur $40 \cdot 10^{14}$ Kupferatome aufgelöst, wobei $2 \cdot 10^9$ Ausscheidungszentren verschwunden. Auf ein Zentrum entfallen also $3,3 \cdot 10^6$ Atome, ungefähr ein Gewicht von $3,5 \cdot 10^{-16}$ g (bei Kupfer) und das Volumen von $0,4 \cdot 10^{-16}$ cm³, etwa 10% des Volumens der Hohlkugel einnehmen. Nun ist zu erwarten, daß schon geringe Schwermetallzusätze zur Ätzlösung genügen, um ihre Ätzrate zu erhöhen. Es hat daher folgendes Bild: Während des Abtragens der Ätzfront auf eine Anhäufung von Fremdatomen. Diese gingen sofort in Lösung und bewirkten eine lokale Aushöhlung des Germaniums, bis sie schließlich abdiffundieren konnten. Von da ab geht das Abtragen in der normalen Art weiter. Es wäre

atomen belegt ist, bleibt die Kegelspitze scharf. Trifft sie aber auf eine Ausscheidung, so findet momentan eine Ätzbeschleunigung, d.h. eine *Abrundung* der Spitze statt. Diese Störung bleibt als Terrasse am Kegelmantel einige Zeit bestehen. Oft ist aber der Krümmungsradius der Abrundung wesentlich größer, als man nach diesem Mechanismus zu erwarten hat. Man kann dann annehmen, daß die Erhöhung der Ätzgeschwindigkeit längs der Versetzungslinie streckenweise unterbleibt infolge wechselnder Fremstoffbelegung. Eine starke Abrundung kann auch durch eine kurzzeitige Richtungsänderung der Versetzungslinie hervorgerufen werden.

Auffallend ist die meist höhere Versetzungsätzrate bei Proben stärkerer Dotierung, besonders wenn die

Tabelle 4

	Elektrische Leitfähigkeit in (Ω cm) ⁻¹	Mulden-dichte m in cm ⁻²	Mittlere Mulden-tiefe in cm	Räumliche Dichte N_p in cm ⁻³	Akzeptoren-dichte N_a in cm ⁻³
Angszustand (Abb. 19a)	0,18	$1,1 \cdot 10^6$	10^{-5}	$1,2 \cdot 10^9$	$7 \cdot 10^{14}$
100° C abgekühlt (Abb. 19b)	1,25	—	—	—	$48 \cdot 10^{14}$
4 Std auf 100° C (Abb. 19c)	0,20	$50 \cdot 10^6$?	$700 \cdot 10^9$	$8 \cdot 10^{14}$

denkbar, daß als Folge eines elektrisch leitenden Kontaktes das Aufweiten auf elektrochemischem Wege erfolgt. Doch dazu dürfte diese leitende Verbindung nicht andauern.

Man sei nochmals an die Arbeit von DASH anzu erinnern [7], der solche Ausscheidungen an Versetzungslinien im ultraroten Licht direkt sehen konnte. Bei TYLER und DASH [8] wird in Germanium mit Thium dekoriert. Die danach auftretenden Ätzgrübchen zeigen oberflächenparallele Versetzungslinien. Auch hier scheint derselbe Effekt zugrunde zu

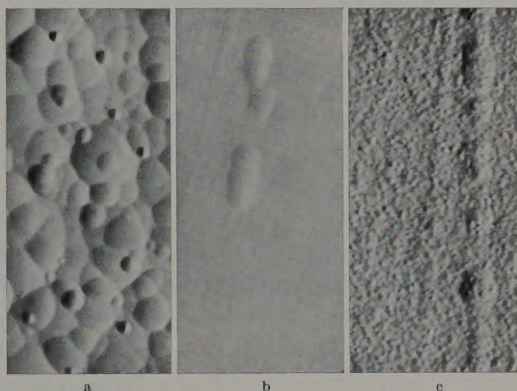


Abb. 19a—c. Ätzmulden auf Germanium. a Vorher, b nach Abschrecken von 890° C, c nach Anlassen bei 475° C (Vergr. immer 400fach)

Linien stark gegen eine Symmetrierichtung geneigt sind. Wenn Fremdstoffe die einzige Ursache für ein rascheres Ätzen sind, dürften Unterschiede einzelner Versetzungen, etwa in ihrem Typ oder in der Neigung gegen Vorzugsrichtungen, sich — abgesehen von der Grübchenform — nur auf dem Umweg über die verschiedene Menge der Anlagerungen äußern. Die Frage, ob eine von Fremdatomen völlig freie Versetzungslinie noch eine restliche, kleine Zusatzätzgeschwindigkeit besitzt, muß ungeklärt bleiben.

Zusammenfassung

Die Ätzlösungen für Germanium kann man einteilen in solche, die die Oberfläche gleichmäßig abtragen und solche, die unregelmäßig angreifen.

Die Gestalt von Ätzfiguren auf Germanium, sowohl Hügel, wie auch Grübchen können quantitativ mit Hilfe einer richtungsabhängigen Ätzgeschwindigkeit beschrieben werden. Kristallbaufehler bewirken vielfach eine lokale Zunahme der Ätzgeschwindigkeit. Bei einer Versetzungslinie tritt diese nur längs ihrer Achse ein, so daß die Spitze des entstehenden Grübchens wie die eines Mach-Kegels vordringt. Die relative Zunahme ist eine, für die Versetzung charakteristische Größe und weitgehend unabhängig von der Beobachtungsebene. Die Geschwindigkeitserhöhung kann aus mehreren Gründen Schwankungen erleiden oder streckenweise unterbleiben, wodurch die Kegelspitze ausrundet.

Elektronenmikroskopische Aufnahmen zeigen höchstens die Kristallanisotropie, so daß eine Beteiligung

entstehung der Entstehung der Versetzungsgrübchen
elektronenmikroskopischen Untersuchungen
keine klare Entscheidung darüber, ob die
der Versetzungsgrübchen exakt scharf ist oder
rundet. Beide Fälle wurden beobachtet. Es
jedoch sichergestellt, daß keine Unsymmetrie
ist, wie es das elastische Spannungsfeld besitzt.
anderen Worten: Elastische Spannungen können
schuld an den Grübchen sein. Optische und
polarisierende Messungen ergaben für das Fort-
treten der Kegelspitze eine zwar reproduzierbare,
an den einzelnen Proben durchaus verschiedene
Windigkeit. Daneben fiel die terrassenförmige
Struktur vieler Versetzungsgrübchen auf. Im
n Abschnitt wurden Fremdstoffe für die erhöhte
bei Muldenbildung verantwortlich gemacht.
Erklärung läßt sich ohne Schwierigkeiten auf die
setzungsgrübchen übertragen: Man weiß, daß
Fremdstoffe sich bevorzugt an Versetzungslinien an-
sammeln und sich dort oft zu Aggregaten vereinigen.
ge die Versetzung kontinuierlich mit Fremd-

elastischer Spannungen an der Grübchenentstehung unwahrscheinlich ist.

Für die Entstehung muldenförmiger Grübchen können punktförmige Fremdstoffausscheidungen verantwortlich gemacht werden. Die erhöhte Ätzrate längs der Versetzungslinien, sowie eine Terrassenbildung in den Grübchen werden ebenfalls den Verunreinigungen zugeschrieben. Es bleibt ungeklärt, ob völlig fremdstofffreie Versetzungen beim Ätzen auch noch in Erscheinung treten.

Herrn Professor Dr. J. JAUMANN danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stets förderndes Interesse, Herrn Professor Dr. C. VON FRAGSTEIN für seine Unterstützung und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Überlassung des Elektronenmikroskops.

Literatur: [1] VOGEL, F.L., W.G. PFANN, H.E. COREY und E.E. THOMAS: Phys. Rev. **90**, 489 (1953). — [2] VOGEL, F.L.: Acta Metallurg. **3**, 95, 245 (1955). — [3] ELLIS, S.G.: J. Appl. Phys. **26**, 1140 (1955). — [4] OKADA, J.: Phys. Soc.

Japan **10**, 1018 (1955). — [5] KURTZ, A.D., S.A. KULB, B.L. AVERBACH: Phys. Rev. **101**, 1285 (1956). — [6] BILL, Proc. Roy. Soc. Lond. A **235**, 37 (1956). — [7] DASH, J. Appl. Phys. **27**, 1193 (1956). — [8] TYLER, W.W. W.C. DASH: J. Appl. Phys. **28**, 1221 (1957). — [9] BON u. E. KAPPLER: Z. Naturforsch. **13a**, 348 (1958). — [10] MANN, G., W. HARTWIG u. H. IRMLER: Z. Naturforsch. **423** (1958). — [11] MENTER, J.W.: Proc. Roy. Soc. A **236**, 119 (1956). — [12] WHEELAN, M.J., P.B. HIRSCH, HORNE und W. BOLLMANN: Proc. Roy. Soc. Lond. A **24** (1957). — [13] BASSETT, G.A., J.W. MENTER und D. V. LEY: Proc. Roy. Soc. Lond. A **246**, 345 (1958). — [14] G. u. E. PREUSS: Z. angew. Phys. **9**, 526 (1957). — [15] R.C. und S.P. WOLSKY: J. Appl. Phys. **24**, 1411 (1957). — [16] ELLIS, R.C.: J. Appl. Phys. **25**, 1497 (1954). — [17] R.: J. Electrochem. Soc. **102**, 586 (1955). — [18] PERGOLD, D. und D. SETTE: Suppl. Nuovo Cim. **4**, 1021 (1956). — [19] L. S.G.: J. Appl. Phys. **28**, 1262 (1957). — [20] B. MAN, B.W.: J. Appl. Phys. **28**, 1236 (1957). — [21] NER, C., u. W. TRAUD: Z. Elektrochem. **44**, 391 (1957). — [22] TURNER, D.R.: J. Electrochem. Soc. **103**, 252 (1956). — [23] GERISCHER, H., u. F. BECK: Z. phys. Chem. **11** (1957). — [24] TWEET, A.G.: Phys. Rev. **111**, 57 (1957).

Dr. WALTER RIESSLER,
Universität Köln, II. Physikalisches Institut

Über den Einfluß der Querschnittverteilung der Elektronendichte eines längsmagnetisierten Plasmas in einem metallischen Hohlleiter auf die Ausbreitung elektrischer Wellen

VON WINFRIED OTTO SCHUMANN

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 29. Juni 1960)

Ist ein metallischer Hohlleiter mit längsmagnetisiertem homogenem Plasma gefüllt, und ist die Grenzfrequenz ω_g des leeren Hohlleiters größer als $\omega_0 = \sqrt{\frac{N e^2}{\epsilon_0 m}}$, die Plasmaresonanzfrequenz, und als $\Omega = \frac{e}{m} B$, die Gyrationfrequenz der Elektronen um die magnetischen Kraftlinien, so ergibt sich nach [1] und [2] ein unterstes Gebiet der Ausbreitung von elektrischen E -Wellen im Bereich von $\omega = 0$ bis $\omega = \Omega$, wenn $\omega_0 > \Omega$ ist, oder ein solches von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_0$, wenn $\Omega > \omega_0$ ist. Messungen, die Herr H. RIEDEL [3] angestellt hat, haben nun ergeben, daß für $\Omega > \omega_0$ bei $\omega = \omega_0$ die Phasengeschwindigkeit nicht Null wird, sondern endlich bleibt und nur mit kleinen Schwankungen von $\omega = 0$ aus abnimmt, bis auf Null in der Gegend von $\omega = \Omega$.

Für diese unerwartete Erscheinung kann der Einfluß der veränderlichen Dichte der Elektronen über den Querschnitt hinweg vermutet werden, was im folgenden diskutiert werden soll.

I. Plasmahohlleiter

Es ist der Einfachheit halber wieder ein ebenes Problem angenommen, s. Abb. 1, d.h. zwei unendlich ausgedehnte Metallplatten im Abstand δ mit einem aufgetragenen Magnetfeld B in z -Richtung. Die Wellenausbreitung erfolge auch in z -Richtung. $\partial/\partial y$ sei

Null. Die Ergebnisse gelten analog auch für zylindrisches Plasma.

Das Magnetfeld sei, auch wieder wegen der Einfachheit, zunächst sehr groß angenommen. wird im Tensor der DK des Plasmas (siehe z.B. [4])

$\epsilon_{xx} = \epsilon_0$, $\epsilon_{xy} = 0$, $\epsilon_z = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$. Die Maxwell

Gleichungen ergeben in diesem Fall für die E -

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega \epsilon_0 E_x, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega \epsilon_z E_z,$$

wobei weiterhin $\epsilon_z = f(x)$ sein soll.

Aus diesen Gleichungen folgt für H_y , mit $e^{-j\omega t}$ z -Abhängigkeit

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\epsilon_z} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon_0} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \right) H_y = 0$$

und

$$E_z = -\frac{j}{\omega \epsilon_z} \frac{\partial H_y}{\partial x}.$$

Leitet man direkt die Differentialgleichung für E_z ab, so erhält man

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon_0} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \right) E_z = 0.$$

Nimmt man nun als einfachstes Beispiel einen linearen Abfall der Elektronendichte von der Mitte, $x = 0$, zum Rande $x = \delta/2$ an

$$\omega_0^2 = \omega_{0m}^2 (1 - \kappa x), \quad \omega_{0r}^2 = \omega_{0m}^2 \left(1 - \kappa \frac{\delta}{2}\right)$$

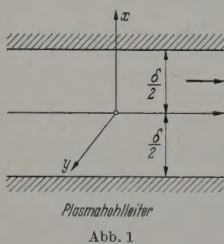


Abb. 1

$$\frac{\varepsilon_z}{\omega} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{0r}^2}{\omega^2} \kappa x = a + b x, \quad (2)$$

ist a positiv für $\omega > \omega_{0m}$, dagegen negativ für $\omega < \omega_{0m}$ ist. Dabei sei ω_{0m} die maximale Resonanzfrequenz in der Mitte, ω_{0r} die der kleinsten Dichte am Rand und es bedeutet

$$b = \frac{\omega_{0m}^2 - \omega_{0r}^2}{\omega^2} \cdot \frac{2}{\delta}. \quad (3)$$

Man nun in die Differentialgleichung (1) als Variable

$$x' = \varepsilon_r = a + b x$$

so entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x'^2} - \frac{1}{x'} \frac{\partial H_y}{\partial x'} + \frac{x'}{b^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \right) H_y = 0, \quad (4)$$

Integral

$$H_y = x' \cdot Z_{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3b} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2} \cdot x'^{\frac{3}{2}} \right) \quad (5)$$

mit Z als einer Besselschen Funktion. Rechnet man H_y mit $E_z = -\frac{j}{\omega \varepsilon_z} \frac{\partial H_y}{\partial x}$ den Wert von E_z , so sieht sich

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \varepsilon_0} x'^{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2} \times \right. \\ \left. \times Z_{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3b} x'^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2} \right) \right\} \quad (6)$$

man nun als Lösung von H_y

$$H_y = x' \cdot [A H_{\frac{3}{2}}^1(\varrho) + B H_{\frac{3}{2}}^2(\varrho)] \quad (7)$$

so H Hankelsche Funktionen bedeuten, und

$$\varrho = \frac{2}{3b} x'^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2}, \quad (8)$$

wird

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \varepsilon_0} x'^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2} [A H_{\frac{1}{2}}^1(\varrho) + B H_{\frac{1}{2}}^2(\varrho)], \quad (9)$$

geben die Grenzbedingungen, nämlich für $x=0$, $\varepsilon_z = a$, $H_y = 0$ und für $x = \delta/2$, $x' = a + b \delta/2$, $E_z = 0$

Gleichungen

$$\frac{H_{\frac{1}{2}}^1(\varrho_a)}{H_{\frac{1}{2}}^2(\varrho_a)} = \frac{-\frac{1}{3} \left(\frac{\varrho}{a + b \frac{\delta}{2}} \right)}{-\frac{1}{3} \left(\frac{\varrho}{a + b \frac{\delta}{2}} \right)} = e^{j \frac{\pi}{2}} \frac{H_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{\varrho}{a + b \frac{\delta}{2}} \right)}{H_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{\varrho}{a + b \frac{\delta}{2}} \right)}. \quad (10)$$

Wir uns besonders für den Fall $\gamma^2 > \omega^2/c^2$, kleine Phasengeschwindigkeit, $v_p = \omega/\gamma$, interessieren, ist das Argument ϱ der Hankel-Funktionen für positives ε_r imaginär, dagegen wird es für negatives ε_r reell. Um aus der Gl. (10) das prinzipiell nötige zu erkennen, wenden wir sie zunächst auf den Fall kleiner b an, d.h. auf den Fall nahezu konstanter DK ε_r .

Dann wird nach Gl. (8) das Argument ϱ sehr groß, nicht gleichzeitig $a=0$ oder $a + b \frac{\delta}{2} = 0$ ist $\gamma = \omega/c$. Für große ϱ ist bekanntlich

$$\left. \begin{aligned} H_{\frac{1}{2}}^{1,2}(\varrho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \varrho}} e^{\pm j \left(\varrho - \frac{5}{6} \pi \right)} \left[1 \mp j \frac{0,139}{2 \varrho} \right] \\ H_{\frac{3}{2}}^{1,2}(\varrho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \varrho}} e^{\pm j \left(\varrho - \frac{7}{6} \pi \right)} \left[1 \pm j \frac{0,195}{2 \varrho} \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Also gilt angenähert

$$\frac{H_{\frac{1}{2}}^1(\varrho)}{H_{\frac{1}{2}}^2(\varrho)} = e^{2j \left(\varrho - \frac{5}{6} \pi \right)}, \quad \frac{H_{\frac{3}{2}}^1(\varrho)}{H_{\frac{3}{2}}^2(\varrho)} = e^{2j \left(\varrho - \frac{7}{6} \pi \right)}.$$

Damit wird aus Gl. (10)

$$e^{-j \pi} \approx e^{2j \left(\frac{\varrho}{a + b \frac{\delta}{2}} - \frac{5}{6} \pi \right)}$$

oder

$$\varrho_a - \frac{\varrho}{a + b \frac{\delta}{2}} = \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

$A. \quad \omega < \omega_{0r}.$

Ist ω so klein, daß im ganzen Gebiet die relativen DKen negativ sind, $\omega^2 < \omega_{0r}^2$, so wird

$$\varrho = \frac{2}{3b} \varepsilon_r^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \varepsilon_r' = -\varepsilon_r = -a - b x.$$

Damit wird

$$\left\{ \sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} b \frac{1}{(-a)^{\frac{3}{2}} - (-a - b \frac{\delta}{2})^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3}{2} b \frac{1}{\left(\frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\omega_{0r}^2}{\omega^2} - 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (13)$$

Ist nun $b \frac{\delta}{2} \ll -a$, so ist in erster Näherung

$$\text{mit } a' = -a, \quad a'^{\frac{3}{2}} - \left(a' - b \frac{\delta}{2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} a'^{\frac{1}{2}} \cdot b \frac{\delta}{2}$$

und es wird

$$\sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a'^{\frac{1}{2}} b \frac{\delta}{2}} = \frac{\pi}{\delta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} - 1}}. \quad (14)$$

Es entsteht also genau dieselbe Lösung, wie man sie aus der Gl. (1) für konstantes ε_z erhält, siehe z. B. [2], wenn man dort für die x -Abhängigkeit $e^{\pm j m x}$ wählt, wobei dann wegen der Grenzbedingungen $m \delta = \pi$ wird. Es folgt, wie gewohnt, daß $\gamma \rightarrow \infty$ geht, wenn $\omega \rightarrow \omega_{0r} = \omega_{0m}$ geht. Dagegen sieht man aus Gl. (13), daß dies bei einem endlichen b (d.h. einem endlichen $\partial \varepsilon_z / \partial x$) nicht mehr auftritt, da der Nenner des Bruches in Gl. (13) keines Falls mehr Null werden kann, um so weniger, je größer $b \frac{\delta}{2} = \frac{\omega_{0m}^2 - \omega_{0r}^2}{\omega^2}$, d.h. die Dichteveriation im Plasma ist.

Aus Gl. (13) läßt sich auch die Phasengeschwindigkeit für $\omega \rightarrow 0$ ableiten. Wenn $\omega \rightarrow 0$ geht, werden a und b sehr groß. Es geht $a' = -a \rightarrow \omega_{0m}^2 / \omega^2$ und es ist $b = \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2}$. Setzt man diese Werte in Gl. (13) ein, so entsteht

$$\sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{3 \pi}{4} \frac{\kappa \omega}{\omega_{0m}} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{\kappa \delta}{2} \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (15)$$

Es wird also mit $m = 1 - \left(1 - \frac{\kappa \delta}{2} \right)^{\frac{3}{2}}$

$$v_{p \omega=0}^2 = \frac{c^2}{1 + \left(\frac{3 \pi}{4} \frac{\kappa c}{\omega_{0m} m} \right)^2}.$$

Wird nun κ sehr klein, so geht $1 - \left(1 - \frac{\kappa\delta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \rightarrow \frac{3}{4} \kappa\delta$ und man erhält dann

$$\gamma_{\omega=0}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\omega_{0m}^2 + c^2 \frac{\pi^2}{\delta^2}}{\omega_{0m}^2}$$

wie bei homogenem Plasma mit $d\varepsilon/dx=0$.

$$\boxed{B. \quad \omega > \omega_{0m}.}$$

Ist ω so groß, daß alle DKen positiv sind, so wird ϱ in beiden Fällen imaginär, wenn $\gamma^2 > \omega^2/c^2$ vorausgesetzt wird.

$$\varrho = j \frac{2}{3b} \varepsilon_r^{\frac{3}{2}} \sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \varepsilon_r = a + bx > 0.$$

Damit wird nach Gl. (12)

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2} &= -\frac{\pi^2}{4} \frac{9}{4} \cdot b^2 \cdot \frac{1}{\left[(a + b \frac{\delta}{2})^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right]^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot b^2 \cdot \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Für $b \frac{\delta}{2} \ll a$ wird daraus

$$\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = -\frac{\pi^2}{\delta^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2}},$$

woraus wieder folgt, daß bei $b \rightarrow 0$ für $\omega^2 \rightarrow \omega_{0m}^2$, $\gamma^2 \rightarrow -\infty$ geht, daß aber für $\omega^2 > \omega_{0m}^2$, γ^2 negativ wird, und eine Ausbreitung erst wieder möglich wird für

$$\omega^2 > \omega_{0m}^2 + \frac{\pi^2}{\delta^2} c^2,$$

wie es die Theorie des homogenen Plasmas erfordert (s. [2], S. 485). Bei endlichem $(b \frac{\delta}{2})$ braucht dies jedoch für $\omega = \omega_{0m}$ nicht mehr einzutreten, da der Nenner der rechten Seite Gl. (16) nicht mehr Null werden kann. Allerdings ist γ^2 dann $< \omega^2/c^2$, d.h. $v_p > c$ und γ^2 kann auch < 0 werden.

Es tritt dann für $\omega > \omega_{0m}$ ein Sperrgebiet mit negativem γ^2 ein und erst dann, wenn bei höheren Frequenzen nach Gl. (16)

$$\frac{\omega}{c} \geq \frac{3\pi}{4} \left(a + b \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}$$

wird, tritt ein oberes Ausbreitungsgebiet auf, das mit $\gamma=0$ beginnt und bei $\omega \rightarrow \infty$ mit $\gamma = \omega/c$ endigt.

Wenn $\omega \rightarrow \infty$ geht, geht die rechte Seite von Gl. (16) in $-\frac{\pi^2}{\delta^2}$ über. Es wird dann $\gamma^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2}$, d.h. $v_p \rightarrow c$ wie es sein muß. Da wir ein unendlich starkes Magnetfeld angenommen haben, würde die Frequenz $\omega = \Omega = \frac{e}{m} B$ auch unendlich groß sein. Bei diesen sehr hohen Frequenzen geht aber auch $\varepsilon_z \rightarrow 1$, der Hohlleiter verhält sich, als ob er mit „Vakuum“ von $\varepsilon_r = 1$ ausgefüllt wäre, und daher wirkt das Magnetfeld bei diesen sehr hohen Frequenzen überhaupt nicht mehr und die Phasengeschwindigkeit geht bei $\omega \rightarrow \infty$ gegen die Lichtgeschwindigkeit.

Es zeigt sich hier möglicherweise eine Konsequenz der Unvollkommenheit unseres zu einfachen Modells, das nur eine lineare Abnahme der Elektronendichte von der Mitte nach außen zu voraussetzt. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß wir bei der Ableitung Gl. (16) die asymptotische Näherung der Hankelfunktionen H für sehr große Argumente ϱ benutzt haben, die an sich nur für sehr kleines b gilt. Irgendwann ergibt Gl. (10) für sehr kleine ϱ ($\varrho \ll 1$) keine einfachen asymptotischen Lösungen. Auch mit der Annahme $\varrho_a \ll 1$ (ω nahe ω_{0m}) und $\varrho_{a+b\frac{\delta}{2}} \gg 1$ ergibt sich $\omega > \omega_{0m}$, daß $\gamma^2 < \omega^2/c^2$ ist.

Die der Wahrheit besser entsprechende Annahme einer parabolischen Abnahme der Elektronendichte gibt namentlich am Rand viel größere Änderungen der Dichte. Mit dieser Annahme $\omega_0^2 = \omega_{0m}^2 (1 - \kappa \frac{\delta^2}{4}) < 1$, ergibt sich mit der Substitution

$$x' = \varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{0m}^2 \kappa}{\omega^2} x^2 = a + bx^2$$

die Differentialgleichung für H_y ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_y}{\partial x'^2} - \frac{1}{2x'} \cdot \frac{x' - 2a}{x' - a} \frac{\partial H_y}{\partial x'} + \\ + \frac{x'}{4b(x' - a)} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \right) H_y = 0, \end{aligned} \right\}$$

die eine bessere Anpassung an die Wirklichkeit gestattete. Die Gleichung hat allerdings eine Singularität bei $x' = a$, $x = 0$, d.h. an der Stelle, wo die größte Elektronendichte ω_{0m} herrscht und wo sie ziemlich konstant ist, so daß für $\omega > \omega_{0m}$ auch hier wahrscheinlich analoge Erscheinungen zu erwarten sind, wie im Abschnitt B.

Ist überhaupt kein Magnetfeld vorhanden ($B=0$), so tritt statt ε_0 der Wert ε_z in den Maxwell'schen Gleichungen auf, und die Differentialgleichung für H_y wird dann statt Gl. (1)

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\varepsilon_z} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} - \gamma^2 \right) H_y = 0$$

und analog für E_z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_0} - \gamma^2 \right) E_z = 0,$$

die natürlich zu anderen Resultaten führen (s. z.B. [4]).

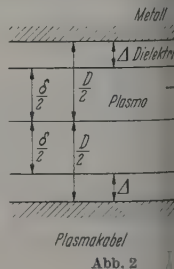
II. Plasmakabel

Um auch den Einfluß eines Dielektrikums um das Plasma, mit der DK ε_D und von der Dicke Δ zwischen Plasma und Metallhülle, zu sehen, s. Abb. 2, sei auch dieser Fall kurz betrachtet.

Wieder sei der ebene Fall vorausgesetzt, mit $\partial/\partial y = 0$ und mit Wellenausbreitung $e^{-j\gamma z}$ in der z -Achse, es ergibt sich dann für das Feld im Dielektrikum, $E_z = 0$ für $x = D/2$

$$H_y = C \operatorname{Co} f m \left(\frac{D}{2} - x \right) \quad \text{mit} \quad m^2 = \gamma^2 - \frac{\omega^2}{v^2}$$

$$E_z = j \frac{m}{\omega \varepsilon_D} C \operatorname{Si} n m \left(\frac{D}{2} - x \right), \quad v^2 = \frac{1}{\varepsilon_D \mu_0}$$



Stetigkeitsbedingung für H_y und E_z bei $x = \delta/2$ an jetzt

$$\left. \begin{aligned} j \frac{\epsilon_0}{\epsilon_D} \frac{m}{\sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} \Im g m \Delta \cdot \sqrt{a + b \frac{\delta}{2}} = j A \\ \frac{1}{3} \left(\epsilon_a + b \frac{\delta}{2} \right) H_{\frac{2}{3}}^2(\epsilon_a) - H_{-\frac{1}{3}}^2 \left(\epsilon_a + b \frac{\delta}{2} \right) H_{\frac{1}{3}}^1(\epsilon_a) \\ H_{\frac{2}{3}}^1 \left(\epsilon_a + b \frac{\delta}{2} \right) H_{\frac{2}{3}}^2(\epsilon_a) - H_{\frac{1}{3}}^2 \left(\epsilon_a + b \frac{\delta}{2} \right) H_{\frac{1}{3}}^1(\epsilon_a) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

es äußere Dielektrikum Luft, $\epsilon_D = \epsilon_0$, so erreicht A größten Wert und wird nach Gl. (19)

$$\Im g m \Delta \cdot \sqrt{a + b \frac{\delta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{0r}^2}{\omega^2}} \cdot \Im g m \Delta. \quad (20)$$

Wohl $\Im g m \Delta$, als auch $\sqrt{a + b \frac{\delta}{2}}$ streben bei genügend großem γ und bei hohen Frequenzen gegen den Wert 1.

Hohe Frequenzen, $\omega > \omega_{0m}$

Wir nehmen wieder — wie in Abschn. I, Gl. (11), beide Hankel-Funktionen die Näherung für großes Argument an und erhalten

$$e^{\frac{2j}{c} \left[\epsilon_a + b \frac{\delta}{2} - \epsilon_a \right]} = e^{-j\pi} \cdot \frac{1 + A}{1 - A}.$$

ϵ_a sind imaginär, da ϵ_r in der Mitte und am Rande des Plasmas positiv ist.

A wird dann schließlich

$$C \sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + \ln \frac{1 + A}{1 - A} = j\pi, \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3b} \left[\left(a + b \frac{\delta}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right] \\ \frac{2}{3} \delta \frac{\omega^2}{\omega_{0m}^2 - \omega_{0r}^2} \left[\left(1 - \frac{\omega_{0r}^2}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{\omega_{0m}^2}{\omega^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Für $A = 0$ geht Gl. (23) in Gl. (16) über: C liegt in der Größenordnung von δ für $\omega > \omega_{0m}$. Für $\omega \rightarrow \infty$ geht $C \rightarrow \delta$.

Die Gl. (21) ist eine transzendente Gleichung für $\sqrt{\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$, weil A nach Gl. (20) auch m enthält.

Für kleine $m\Delta$ wird $A = m\Delta \cdot n_r$, $n_r = \sqrt{1 - \frac{\omega_{0r}^2}{\omega^2}}$ und $|A| \ll 1$ wird $\ln \frac{1 + A}{1 - A} \approx 2A$. Damit wird Gl. (21)

$$\begin{aligned} m(C + 2A \cdot n_r) &= j\pi \\ m^2 &= \gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = - \frac{\pi^2}{(C + 2A \cdot n_r)^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

ist kleiner als ω^2/c^2 , $v_p > c$, um so weniger, je größer δ und A sind.

Managen führt ein Versuch die Gl. (21) für so große γ zu lösen, so daß $\Im g m \Delta = 1 - 2e^{-2m\Delta}$ zu setzen ist, widersprechen, nämlich zu m , die nicht groß sind, was zu schließen ist, daß solche großen Werte nicht treten, und insbesondere, daß γ im Frequenzgebiet ω_{0m} nicht gegen ∞ unendlich gehen kann.

Managenfalls überzeugt ein Vergleich der Gl. (16) mit (23), daß eine dielektrische Umhüllung des Plasmas Werte von γ^2 gegenüber ihren Werten ohne diese Umhüllung positiver macht und damit auch den Wert negativer γ^2 für $\omega > \omega_{0m}$ verkleinert, um so mehr, je größer A ist.

Unser sehr vereinfachtes Modell eines Plasmas mit veränderlicher Dichte in einem unendlich starken Magnetfeld kann also wohl erklären, daß die Phasengeschwindigkeit im Gebiet der Plasmaresonanzfrequenzen nicht auf Null geht, aber nicht den experimentellen Befund, daß sich das untere Frequenzband über diese Resonanzfrequenzen hinaus bis zum Werte $\omega = \Omega = \frac{e}{m} B$ bei endlichem Magnetfeld fortsetzt, und erst dort mit $v_p = 0$ aufhört. Dazu bedarf es einer noch genaueren Approximation für den Fall eines endlichen Magnetfeldes.

III. Endliches Magnetfeld

Um die Einwirkung eines endlichen Magnetfeldes zunächst abzuschätzen, kann man sich der bei homogenem Plasma auftretenden Tatsache bedienen, daß

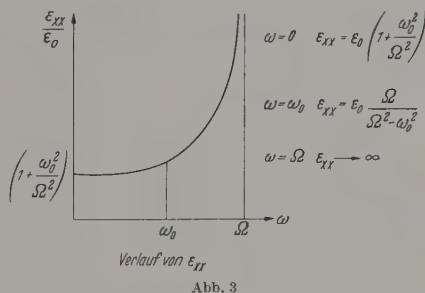


Abb. 3

für eine sehr hohe Grenzfrequenz des leeren Hohlleiters ω_0 , $\omega_0 \gg \omega_0$, $\omega_0 \gg \Omega = \frac{e}{m} B$ die Kopplung der im allgemeinen gleichzeitig auftretenden E - und H -Wellen sehr gering wird, d.h. daß die DK ϵ_{xy} im Tensor der DKen vernachlässigt werden kann, siehe [1].

Damit vereinfacht sich die Differentialgleichung sehr stark gegenüber dem allgemeinen Fall und man erhält für H_y die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{1}{\epsilon_z} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} \frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\epsilon_z}{\epsilon_0} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{xx}} \right) H_y = 0 \quad (24)$$

mit

$$\epsilon_z = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{0z}^2}{\omega^2} \right), \quad \epsilon_{xx} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right),$$

wobei jetzt beide DKen von x abhängig werden und wobei ϵ_z mit x zunimmt, während ϵ_{xx} mit x abnimmt, solange $\Omega^2 > \omega^2$ ist. Gegenüber Gl. (1) ist der Hauptunterschied, daß jetzt $\gamma^2 \epsilon_0/\epsilon_{xx}$ auftritt, gegenüber γ^2 in Gl. (1). Da ϵ_{xx} nach Abb. 3 namentlich zwischen $\omega = \omega_0$ und $\omega = \Omega$ sehr stark anwächst, bedeutet das in diesem Gebiet eine sehr starke Vergrößerung von γ gegenüber den Werten, die aus Gl. (1) folgen, und bei $\omega \rightarrow \Omega$ geht $\gamma \rightarrow \infty$, $v_p \rightarrow 0$, so daß diese Tatsache der Messungen von RIEDEL dadurch wenigstens verständlich werden.

Allerdings läßt sich der theoretische Nachweis, daß γ^2 nach dem Durchschreiten von $\omega = \omega_{0m}$ (siehe Abschnitt I, B) positiv bleibt und größer als ω/c , d.h., daß die Phasengeschwindigkeit von $\omega = 0$ an nur mit kleinen Schwankungen im Frequenzgebiet um $\omega = \omega_{0m}$ herum von $v_p = v_{p_0}$ bei $\omega = 0$ bis auf Null abnimmt, bei $\omega = \Omega = \frac{e}{m} B$, auch durch diese Differentialgleichung wahrscheinlich nicht erbringen, da ϵ_{xx}/ϵ_0 im Frequenz-

gebiet um $\omega = \omega_{0m}$ herum, nur so wenig von eins abweicht, selbst wenn Ω nur ein kleines Vielfaches von ω_{0m} ist, so daß in diesem Gebiet die Abweichungen von Gl. (16), Abschn. I, B, nur sehr gering sein dürften. Dazu ist es offenbar nötig, auch die Tensorkomponente $\varepsilon_{xy} = -j\varepsilon_0 \frac{\omega_0^2 \Omega}{\omega(\Omega^2 - \omega^2)}$ zu berücksichtigen, die in dem erwähnten Frequenzgebiet einen viel größeren Einfluß hat.

Der Vollständigkeit halber sei die Differentialgleichung für variable ε_{xx} , ε_{xy} und ε_z bei endlichem B angegeben. Sie heißt

$$\frac{\partial^4 H_y}{\partial x^4} + A \frac{\partial H_y}{\partial x^3} + B \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + C \frac{\partial H_y}{\partial x} + D H_y = 0, \quad (25)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} + 3 \varepsilon_z \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)' \\ B &= \left(1 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{xx}} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_0} - \gamma^2 \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_{xx}} + \\ &\quad + \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)'' + 4 \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)' \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx}} \varepsilon_z + 3 \varepsilon_z \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)'' \\ C &= \frac{\varepsilon_{xy} \varepsilon_z}{\varepsilon_{xx}} \left\{ -2 \gamma^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_{xy}} \right)' + \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)' \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_{xy}} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \gamma^2 \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} + \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)'' \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' \left[\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} + \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)'' \right] + \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)''' \right\} \\ D &= -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{xx}} \left\{ \left(\gamma^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_0} \right)^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\varepsilon_{xy}^2}{\varepsilon_0^2} - \gamma^2 \varepsilon_{xy} \left(\frac{1}{\varepsilon_{xy}} \right)'' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_z}{c^2} \frac{\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_0} \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)'' \right\}. \end{aligned}$$

Die eingeklammerten gestrichelten Symbole bedeuten Differentiationen nach x .

Für konstante DKen geht die Gleichung in die Gl. (2) in [2] über. Besonders charakteristisch ist das Auftreten der Differentialquotienten von $1/\varepsilon_{xy}$ und $\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{xy}$, die den starken Einfluß des räumlichen und zeitlichen Verlaufs von ε_{xy} betonen. Der Wert von

$$\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} = j\omega \frac{\Omega^2 + \omega_0^2}{\omega_0^2 \Omega}$$

durchläuft ein Maximum von $\frac{2}{3} \frac{(\Omega_0^2 + \omega_0^2)^{3/2}}{\omega_0^2 \Omega}$ bei $\omega^2 = \frac{\Omega_0^2 + \omega_0^2}{3}$, das nicht zu fern von $\omega = \omega_0$ liegt, wenn Ω nicht zu groß gegen ω_0^2 ist. Nimmt man auch hier einen linearen Abfall der Elektronendichte nach außen an, $\omega_0^2 = \omega_{0m}^2 (1 - \kappa x)$, so wird

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{xy}} \right)' = \left(\frac{1}{\varepsilon_{xy}} \right)'' = \frac{1}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)'$$

und für die interessante Frequenz $\omega = \omega_{0m}$ wird einfach

$$\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\varepsilon_{xy}} \right)', \quad \text{wobei bei dieser Frequenz}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0 \kappa x, \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_0 \frac{\Omega^2 - \omega_{0m}^2 \kappa x}{\Omega^2 - \omega_{0m}^2},$$

$$\varepsilon_{xy} = -j \varepsilon_0 \frac{\Omega \omega_{0m}}{\Omega^2 - \omega_{0m}^2} \cdot (1 - \kappa x)$$

werden. Ferner wird dann

$$\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' = j \frac{\kappa}{\Omega \omega_{0m}} \frac{(\Omega^2 - \omega_{0m}^2)}{(1 - \kappa x)^2}$$

und

$$\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' = \kappa \cdot \frac{\Omega^2 - \omega_{0m}^2}{\Omega^2 - \omega_{0m}^2 \kappa x} \cdot \frac{1}{1 - \kappa x}$$

und schließlich

$$\varepsilon_z \left(\frac{1}{\varepsilon_z} \right)' = -\frac{1}{x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{xy}} \right)' = -j \frac{\varepsilon_0 \kappa^2 x^2}{\Omega \omega_{0m}} \cdot \frac{\Omega^2 - \omega_{0m}^2}{(1 - \kappa x)^2}$$

Man sieht, daß der Einfluß von ε_{xy} , d.h. der Kopplung der E - und H -Wellen, um so größer ist, je man sich dem Plasmarand befindet, d.h. der Sperrgebietes die Grenzbedingungen zu erfüllen sind.

Eine genauere Diskussion der Gln. (24) und (25) erfolgt später.

Zusammenfassung

An einem einfachen Modell eines Plasmas Stoßdämpfung in leitender Umhüllung, mit linear fallender Elektronendichte von der Achse (Resonanzfrequenz ω_{0m}) bis zum Rande des Plasmas (Resonanzfrequenz ω_0), und bei aufgeprägtem unendlich starkem Magnetfeld B wird die Ausbreitung elektrischer Wellen längs der Achse des Plasmas diskutiert. Es ergibt sich, daß bei der Frequenz $\omega = \omega_{0r}$ die Ausbreitungskonstante γ in $e^{-j\gamma x}$ nicht mehr unendlich wird, es bei homogenem Plasma der Fall ist. Die Phasengeschwindigkeit geht hier nicht mehr gegen Null, so weniger, je größer der Dichteabfall ist. Für $\omega > \omega_{0r}$ folgt ein Sperrgebiet mit negativem γ^2 ohne Ausbreitung bis bei höheren Frequenzen das bekannte zugehörige Ausbreitungsgebiet beginnt. Das untere Ausbreitungsgebiet erstreckt sich nur bis ins Gebiet der Plasmaresonanzfrequenzen, aber ohne daß die Phasengeschwindigkeit zu Null wird.

Es wird dann auch der Fall diskutiert, daß zwischen Plasma und Metallwand eine dielektrische Schicht befindet, durch deren Wirkung sich die Ausbreitung im Sperrgebietes für $\omega > \omega_{0m}$ verringert. Eine näherete Abschätzung der γ -Werte einer Anordnung mit endlichem Magnetfeld und mit Vernachlässigung von ε_{xy} ergibt, daß dann γ bei Frequenzen zwischen ω_{0m} und $\Omega = \frac{l}{m} B$ größer wird als bei sehr großem Magnetfeld und daß γ bei $\omega \rightarrow \Omega$ gegen Unendlich geht, d.h. die Phasengeschwindigkeit dort gegen Null geht, wenn γ^2 in dem Bereich $\omega_{0m} < \omega < \Omega$ positiv ist. Diese letztere Tatsache ist jedoch wohl nur mit Hilfe der exakten Differentialgleichung für endliches B und veränderliche DKen zu begründen, wobei insbesondere der Einfluß der DKen ε_{xy} von besonderer Bedeutung ist, d.h. die Kopplung der E - und H -Wellen.

Literatur: [1] SCHUMANN, W.O.: Z. angew. Phys. 10 (1959). — [2] SCHUMANN, W.O.: Z. angew. Phys. 10 (1956). — [3] RIEDEL, H.: Noch unveröffentlicht. — [4] SCHUMANN, W.O.: Z. Naturforsch. 5a, 612 (1950). — Z. angew. Phys. 12, 145 (1960).

Professor Dr. WINFRIED OTTO SCHUMANN
Elektrophysikalisches Institut der TH München

Messung der Sättigungsmagnetisierung von Ferriten durch ferromagnetische Resonanz

Von FRITZ SCHNEIDER

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 26. April 1960)

1. Einleitung

vielen Größen, die durch ferromagnetische Resonanz (FER) an Ferriten gemessen werden können, etwa bei den Anisotropiekonstanten oder dem g -Faktor, ist zur Auswertung der Ergebnisse die Kenntnis der Sättigungsmagnetisierung M_0 erforderlich, die zusätzlich mit Drehmagnetometern (s. A. KUSSMANN [1]) oder mit der magnetischen Waage (z. B. nach K. MATHIEU [2]) gemessen werden muß. Beide Geräte werden dem Experimentator, der die FER von Ferriten untersuchen will, selten zur Verfügung stehen. Sie erfordern jeweils einen relativ großen Probekörper von genau bestimmtem Volumen und ein inhomogenes Magnetfeld bekannter Inhomogenität. In der vorliegenden Arbeit soll deshalb eine Möglichkeit untersucht werden, M_0 direkt aus Resonanz-Messungen zu erhalten. Wie beobachteten WHITE, SOLT und MERCEY [3] und DILLON [4], daß in ellipsoidförmigen Probekörpern durch ein inhomogenes Mikrowellenfeld nur die bis dahin allein untersuchte Grundrezonanz (Kittel-Mode), sondern auch höhere Eigenrezonanzen angeregt werden, so daß Absorptionskurven bei zwei oder mehr Werten des statischen Magnetfeldes H_0 erscheinen. Wie WALKER [5] zeigte, ist die Frequenz der Resonanzfeldstärken für die ersten Eigenrezonanzen kugelförmiger Probekörper direkt mit der Sättigungsmagnetisierung proportional, die bei den zur Ermittlung der FER nötigen Gleichfeldstärken von 100 Oe immer gleich der Sättigungsmagnetisierung ist. Für Einkristalle aus Yttriumgranat, deren Resonanzlinien extrem schmal sind ($\Delta H = 1 \dots 3$ Oe), bestätigten FLETCHER [8] die Lage von etwa 40 Linien im beobachteten Spektrum aus der etwas modifizierten Walkerschen Theorie [5], [6], [7] berechneten. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß für polykristalline Probekörper, bei denen die Anisotropieverbreiterung des Spektrums nicht zu groß ist ($\Delta H = 100 \dots 250$ Oe), der aus dem Linienabstand berechnete Wert für M_0 mit der magnetischen Waage gemessenen übereinstimmt. Mit Hilfe dieses Effektes kann die Bestimmung von M_0 auf die Messung homostatischer Magnetfelder zurückgeführt werden.

2. Theorie

Die Bewegungsgleichung der ferromagnetischen Spins,

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \gamma (\mathcal{M} \times \mathcal{H}_i), \quad (1)$$

Magnetisierung; γ = gyromagnetisches Verhältnis; \mathcal{H}_i = Magnetfeld im Ferrit

zerlegt man \mathcal{M} und \mathcal{H}_i in die zeitunabhängigen Komponenten \vec{M}_0 und \vec{H}_0 und die rotierenden Komponenten $\vec{m} = m e^{i\omega t}$ und $\vec{h}_i = h_i e^{i(\omega t + \varphi_i)}$ senkrecht zur

($\vec{M}_0 \times \vec{H}_0$) + ($\vec{m} \times \vec{h}_i$) + ($\vec{m} \times \vec{H}_0$) + ($\vec{M}_0 \times \vec{h}_i$).

Das erste Glied verschwindet, weil \vec{H}_0 parallel zu \vec{M}_0 ist, das zweite Glied wird als Produkt kleiner Größen vernachlässigt (Linearisierung), also bleibt:

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial t} = \gamma [(\vec{m} \times \vec{H}_0) + (\vec{M}_0 \times \vec{h}_i)]. \quad (2)$$

Die Komponente dieser Gleichung senkrecht zu \vec{m} ,

$$m \omega = \gamma (m \cdot H_0 - M_0 \cdot h_i \cos \varphi_i),$$

φ_i = Winkel zwischen \vec{m} und \vec{h}_i

bestimmt die Frequenz der Rotation von \vec{m} und \vec{h}_i . Für kugelförmige Ferritproben folgt hieraus mit $H_0 = H_{i0} + 4\pi/3 \cdot M_0$:

$$\frac{\omega}{\gamma} = H_0 - 4\pi M_0 \left(\frac{h_i \cos \varphi_i}{4\pi m} + \frac{1}{3} \right). \quad (3)$$

Bei der Grundschwingung ist $\frac{h_i \cos \varphi_i}{4\pi m} = -\frac{1}{3}$ [siehe Gl. (10) mit $l=1$], so daß in (3) das zweite Glied rechts verschwindet und die bekannte Resonanzbedingung

$$\omega/\gamma = H_0 \quad (4)$$

übrigbleibt. Im allgemeinen aber sind die Resonanzfeldstärken der Oberschwingungen gegen ω/γ um einen Betrag verschoben, der nach (3) proportional zu M_0 ist.

Zur Untersuchung der FER wird der Probekörper an eine Stelle maximaler Magnetfeldstärke in das Feld einer stehenden Mikrowelle gebracht; dort ist $\vec{E}=0$ und deshalb auch $\text{rot } \vec{H}=0$. Unter dieser Voraussetzung sind \vec{h}_i und \vec{m} von WALKER [5] auf folgendem Wege berechnet worden: \vec{H} hat ein skalares Potential,

$$\vec{H} = \text{grad } \psi(x, y, z) \cdot e^{i(\omega t + \varphi_0)}, \quad (5)$$

das außerhalb des Ferrites die Laplace-Gleichung

$$\Delta \psi_a = 0 \quad (6a)$$

und im Inneren die Gleichung

$$\Delta \psi_i = \frac{\kappa}{1 + \kappa} \cdot \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{H_{i0} \cdot 4\pi M_0}{H_{i0}^2 - (\omega/\gamma)^2} \quad (6b)$$

erfüllen muß. (6b) folgt aus $\text{div}(\vec{H}_i + 4\pi \mathcal{M}) = 0$, wenn \vec{m} mit Hilfe von (2) eliminiert wird. Durch die Transformation $z' = z \sqrt{1 + \kappa}$, durch die die Kugel in ein Rotationsellipsoid übergeführt wird, erhält (6b) dieselbe Form wie (6a). Um für (6a) und (6b) Lösungen gleicher Gestalt zu erhalten, transformiert man deshalb in rotationsellipsoidische Koordinaten (ξ, η, φ außen und $\tilde{\xi}, \eta, \varphi$ innen) und erhält als allgemeine Lösung von (6) ψ als Produkt von zugeordneten Kugelfunktionen:

$$\psi_a = c_a Q_\tau^l(i\xi) \cdot P_\tau^l(\eta) e^{il\varphi}, \quad \psi_i = c_i P_\tau^l(i\tilde{\xi}) P_\tau^l(\eta) e^{il\varphi}. \quad (7)$$

(c_a, c_i Konstanten)

ψ_i und ψ_a sind durch die magnetostatischen Randbedingungen

$$\psi_i = \psi_a \quad \text{und} \quad \frac{\partial \psi_a}{\partial n} = \frac{\partial \psi_i}{\partial n} + 4\pi m_n \quad (8)$$

(n Normalenrichtung zur Oberfläche)

an der Ferritoberfläche ($i\bar{\xi} = i\xi_0$; $i\bar{\xi} = i\xi_0 = \sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}}$) miteinander verknüpft. Aus (7) und (8) folgt:

$$\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \frac{P_r^{l-1} \left(\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \right)}{P_r^l \left(\sqrt{\frac{1+\kappa}{\kappa}} \right)} + r + 1 + l \cdot \frac{\omega}{\gamma} \cdot \frac{4\pi M_0}{H_0^2 - \left(\frac{\omega}{\gamma} \right)^2} = 0. \quad (9)$$

Gl. (9) stellt eine Beziehung zwischen ω/γ und H_0 dar, ist also eine explizite Form der allgemeinen Resonanzbedingung (3). Für den einfachen Fall $r=l$

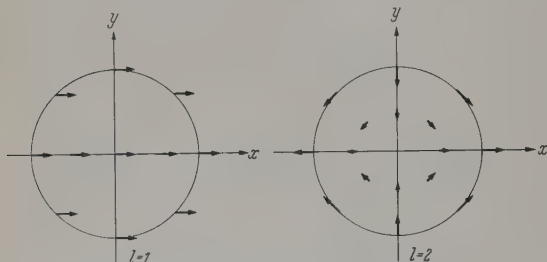


Abb. 1. Die Quermagnetisierung \vec{m} für $l=1, 2$. Alle Pfeile rotieren mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω , ihre Länge ist proportional zu m

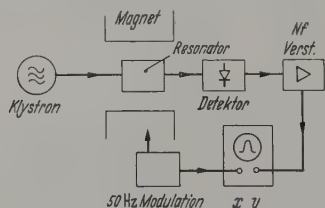


Abb. 2. Blockschatplan der Apparatur

erhält man aus (9) die zum Index l und zur Frequenz ω gehörende äußere Resonanzfeldstärke $H_0^{(l)}$:

$$H_0^{(l)} = \frac{\omega}{\gamma} - 4\pi M_0 \left(\frac{l}{2l+1} - \frac{1}{3} \right). \quad (10)$$

Ein Vergleich von (10) und (3) ergibt:

$$-m = \frac{2l+1}{4\pi l} \cdot h_i \cos \varphi_0, \quad (11)$$

und aus (7) und (5) folgt mit $r=l$:

$$\vec{h}_i = \text{const} \cdot (x + iy)^{l-1} e^{i(\omega t + \varphi_0)}. \quad (12)$$

\vec{m} und \vec{h}_i sind also unabhängig von z und einander proportional. In einem Schnitt durch die Kugel senkrecht zur z -Achse ergibt sich aus (11) und (12) zur Zeit $t=0$ für $l=1$ und $l=2$ die in Abb. 1 aufgezeichnete Verteilung der Quermagnetisierung \vec{m} . Aus (10) folgt mit $l=1$ und $l=2$:

$$H_0^{(1)} - H_0^{(2)} = \frac{4\pi}{15} M_0. \quad (13)$$

Mit Hilfe dieses einfachen Zusammenhanges kann die Messung der Sättigungsmagnetisierung auf die Messung von zwei Resonanzfeldstärken zurückgeführt werden. Meßtechnisch wichtig ist, daß unter den der Rechnung zugrunde liegenden Voraussetzungen (rot $\xi=0$, Kugel im Vakuum) der aus (13) erhaltene Wert für M_0 weder vom Kugeldurchmesser noch von der Mikrowellenfrequenz abhängt.

Die Näherung rot $\xi=0$ ist nur zulässig für Grenzfall $d \rightarrow 0$ (d Kugeldurchmesser). Die Korrektur, die für $d > 0$ in Gl. (10) anzubringen ist, ist die Grundschiwingung ($l=1$) von MERCEREAU [6] HURD [7] berechnet worden:

$$H_0^{(1)} = \frac{\omega}{\gamma} + \frac{2\pi M_0}{9} \left(1 + \frac{\varepsilon}{5} \right) \cdot \left(\frac{d}{c} \right)^2 \cdot \omega^2.$$

ε = Dielektrizitätskonstante des Ferrites,
 c = Lichtgeschwindigkeit.

Für Oberschwingungen ($l > 1$) ist noch keine Korrektur bekannt. Man wird aber erwarten dürfen, daß erste Korrekturglied ebenfalls proportional zu d^2 ist:

$$H_0^{(2)} = \frac{\omega}{\gamma} - \frac{4\pi}{15} M_0 + \text{const} \cdot d^2 \cdot M_0,$$

so daß an Stelle von (13) die Bedingung tritt:

$$H_0^{(1)} - H_0^{(2)} = \frac{4\pi}{15} \left(1 + \text{const} \cdot d^2 \right) M_0.$$

Die in (16) dargestellte lineare Abhängigkeit $H_0^{(1)} - H_0^{(2)}$ von M_0 ist experimentell für eine Kugel Yttrium-Granat ($d=1,3$ mm) bereits von FLETCHER [8] gefunden worden, dessen Messungen für die Konstante in (16) den Wert ergaben: $\text{const} = 8 \cdot 10^{-2}$ cm. Hiermit würde die unkorrigierte Gl. (13) für Kugeln mit 0,7 mm Durchmesser einen etwa 4% zu großen Wert für M_0 ergeben.

3. Apparatur

Zur Untersuchung der verhältnismäßig kräftigen Resonanzabsorption von Ferritkugeln genügt ein einfaches X-Bandspektrometer mit 50-Hz-Magnetmodulation (Abb. 2), in das für die hier beschriebenen Messungen ein Transmissions-Resonator vom Typ H_{202} (Abb. 3) eingebaut wurde.

Ein Vergleich von Abb. 1 und Abb. 3 zeigt, daß im Mittelpunkt dieses Resonatortyps (Stellung A) gerade die Verteilung des Mikrowellen-Magnetfeldes H_1 herrscht, durch die die Oberschwingung mit $l=1$ angeregt wird. In Stellung B ist H_1 homogen, wird ausschließlich die Grundschiwingung ($l=0$) angeregt. Durch Verschieben der Kugel von A nach B können diese beiden Schwingungsformen nacheinander angeregt werden. Die Lage ihrer Maxima kann auf diese Weise auch dann noch genau gemessen werden, wenn bei einem Material die Sättigungsmagnetisierung so klein oder die Linienbreite so groß ist, daß gleichzeitiger Anregung (Stellung zwischen A und B) die Linien nicht aufgelöst erscheinen. Die Konfiguration an den Punkten A und B garantiert, daß mit Sicherheit vorwiegend die Schwingungen mit $l=1$ bzw. $l=2$ angeregt werden. Infolge ihrer symmetrischen Lage sind diese Punkte im Resonanzspektrum leicht aufzufinden.

Zur Messung von $H_0^{(1)}$ bzw. $H_0^{(2)}$ wurde die Position der Absorptionslinie bei kleiner Magnetfeldmodulation (etwa 30 Oe_{eff}) auf die Mitte des Oszillographenschirms eingestellt und dann H_0 direkt mit einem Prototypen-Resonanz-Magnetfeldmesser oder durch Messung

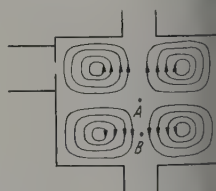
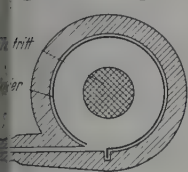


Abb. 3. Mikrowellen-Magnetfeld H_{202} -Resonator

estromes in der Magnetwicklung bestimmt. n auf diese Weise bis auf $\pm 1/100$ der Linien- ΔH gemessen werden, so daß man $H_0^{(1)} - H_0^{(2)}$ mit Fehler von $\pm 1/50 \cdot \Delta H$ erhält.

leitenden Wände des Resonators wirken so, ären spiegelbildlich zu den Wänden weitere n vorhanden. Die für die Gültigkeit von (6a) edige Voraussetzung, daß sich die Kugel allein endlichen freien Raum befinden soll, ist also nur l, wenn der Abstand der Kugel von den Wänden egen den Kugeldurchmesser ist. Befinden sich



Kugelmühle (innerer Durchmesser 30 mm)

n. Die Kugeln wurden aus diesem Grunde Einbetten in PVC-Schaum (Styropor) im Resor befestigt.

Im Schleifen von sehr genauen Kugeln läßt man BOND [9] (s. auch DILLON [10]) Bruchstücke des es vor einer rauen Oberfläche rotieren. Frei stende starre Körper drehen sich um die Achse n größten Trägheitsmomentes. Das meiste Mate- ird also dort abgeschliffen, wo der Abstand der äche vom Schwerpunkt am größten ist, so daß nde eine Kugel übrigbleibt.

Abb. 4 ist eine nach dieser Methode arbeitende mühle dargestellt, in der die Ferriteilchen durch rtangentialen Luftstrom in einem mit Sandpapier erten Zylinder herumgewirbelt werden.

4. Messungen

ur experimentellen Prüfung der in Ziff. 2 dar- erten Theorie wurde die Sättigungsmagnetisierung rei polykristallinen Ferriten aus dem Abstand i $l=1$ und $l=2$ gehörenden Absorptionslinien hmt. Da die korrigierte Formel (16) zwei Un- ante enthält, sind zur Berechnung von M_0 istens zwei Kugeln erforderlich. Es wurde des- ortei Ferrit II (s. nachstehende Tabelle) die Diffe- $H_0^{(1)} - H_0^{(2)}$ an einer Reihe von Kugeln mit Durch-

Tabelle. Sättigungsmagnetisierung von Ni-Zn-Ferriten

Ferrit	d [mm]	M_s [Oe]			
Pyroxeube IV F (Nickel-Ferrit)	1,45	209 ± 6	193 ± 6	202 ± 4	
$x\text{NiO}_{0,5} \cdot \text{ZnO}_{0,5}$ $x_2\text{O}_3 + 0,3 \text{ Mol.-%}$	0,75	399 ± 3	392 ± 3	$393 \pm 0,8$	
$x_3\text{O}_3$					
$x_4\text{O}_3 \cdot \text{ZnO}_{0,5}$ $x_5\text{O}_3 + 0,6 \text{ Mol.-%}$	0,75	398 ± 3	391 ± 3	$397 \pm 0,5$	

ern zwischen 0,76 und 1,63 mm gemessen. Diese e sind in Abb. 5 über d aufgetragen; sie lassen arstellen durch die ausgezogene Parabel

$$H_0^{(1)} - H_0^{(2)} = 328 + 15d^2. \quad (17)$$

if. angew. Physik. Bd. 12

Mit (16) folgt hieraus

$$M_0 = 392 \pm 4 \text{ Oe}; \text{ const} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^{-2} \text{ für } t = 20^\circ \text{ C.}$$

An einer größeren Kugel desselben Ferrites ($d=3,2 \text{ mm}$) haben W. JELLINGHAUS (MPI Düsseldorf) und S. MÜLLER (Institut für theoretische Physik der Universität Köln) M_0 mit magnetischen Waagen gemessen. Sie fanden in guter Übereinstimmung mit dem hier gemessenen Wert $M_0 = 401 \pm 8 \text{ Oe}$ bzw. $M_0 = 393 \pm 1 \text{ Oe}$.

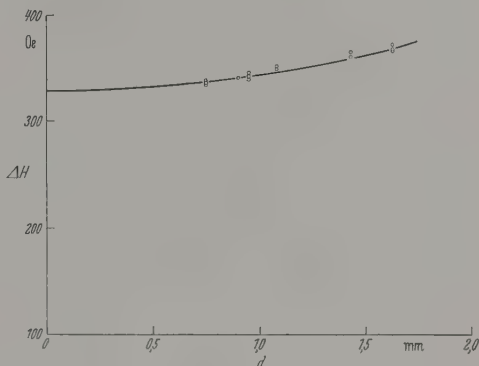


Abb. 5. Abstand der Absorptionslinien mit $l=1$ und $l=2$ (Ferrit II)

Bei den untersuchten polykristallinen Ferriten sind die Absorptionslinien breit ($\Delta H = 120 \dots 250 \text{ Oe}$), so daß $H_0^{(1)} - H_0^{(2)}$ nur bis auf $\pm 1 \dots 3\%$ genau gemessen werden konnte. Der durch Benutzung von (13) an Stelle von (16) entstehende systematische Fehler beträgt nach (17) für $d=0,8 \text{ mm}$ etwa 2% , ist also nicht größer als die Meßunsicherheit.

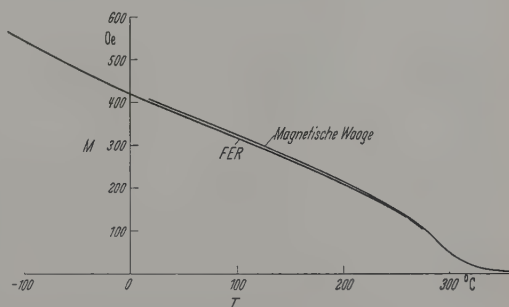


Abb. 6. Sättigungsmagnetisierung von Ferrit II

Bei zwei weiteren Ferriten wurde deshalb $H_0^{(1)} - H_0^{(2)}$ nur an je einer Kugel gemessen. Die nach (13) berechneten Werte für M_0 sind in Spalte 3 der Tabelle eingetragen. Spalte 4 enthält die mit $\text{const} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mm}^{-2}$ aus (16) berechneten Sättigungsmagnetisierungen und Spalte 5 Werte, die für Ferrit I von W. JELLINGHAUS und für Ferrit II und III von S. MÜLLER mit magnetischen Waagen gemessen worden sind. In der Tabelle ist die Sättigungsmagnetisierung pro Volumeneinheit angegeben; es ist aber zu beachten, daß alle Werte sich nicht auf ideale Kristalle, sondern auf etwas poröse polykristalline Proben beziehen, deren Dichte einige Prozent kleiner ist als die idealer Einkristalle.

Am Ferrit II wurde auch der Temperaturverlauf der Sättigungsmagnetisierung zwischen $+240$ und

—120° C gemessen (Abb. 6). Hierzu wurde die Kugel ($d=1,3$ mm) in einem doppelwandigen evakuierten Quarzrohr durch einen Luftstrahl erhitzt bzw. abgekühlt. Durch die Nähe der Quarzwände erhält man auch bei Benutzung von (16) für M_0 einen um fast 3 % zu großen Wert. Die in Abb. 6 eingetragene Kurve wurde deshalb für $t=20^\circ$ C auf den aus Abb. 5 erhaltenen Wert reduziert. Daß dieses Verfahren zulässig ist, zeigt die gute Übereinstimmung der korrigierten Kurve mit der von W. JELLINGHAUS mit der magnetischen Waage gemessenen Magnetisierungskurve, die ebenfalls in Abb. 6 eingetragen ist.

Zusammenfassung

In einem inhomogenen Mikrowellenfeld haben Ferritkugeln ein Spektrum von Absorptionslinien, deren Abstand der Sättigungsmagnetisierung M_0 proportional ist. Nach einer Skizzierung der bereits bekannten Theorie dieses Effektes wird M_0 für drei polykristalline Ferrite aus dem Linienabstand berechnet. Der so erhaltene Wert stimmt sowohl im

Absolutwert als auch im Temperaturverlauf mit an magnetischen Waagen gemessenen gut überein, die Differenzen sind kleiner als 3 %.

Herrn Professor Dr. R. HONERJÄGER danke für wertvolle Anregungen und Herrn Dr. W. JELLINGHAUS und Herrn Dipl.-Phys. S. MÜLLER für die Messungen der Sättigungsmagnetisierung mit der magnetischen Waage.

Literatur: [1] KUSSMANN, A.: ATM (1958), Lieg. J. 62-5. — [2] MATHIEU, K.: Arch. Eisenhüttenw. 16 (1943). — [3] WHITE, R. L., I. H. SOLT and Y. E. MERCELL: Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II 1, 12 (1956). — WHITE, R. L. and I. H. SOLT: Phys. Rev. 104, 56 (1956). — [4] DILLON, J. F.: Bull. Amer. Phys. Soc., Ser. II 1, 125 (1956). — [5] KER, L. R.: Phys. Rev. 105, 390 (1957). — [6] MERCELL, J. E.: Suppl. to J. Appl. Phys. 30, 184 S. (1959). — [7] L. R. A.: Canad. J. Phys. 36, 1072 (1958). — [8] FLETCHER, I. H. SOLT jr. and R. BELL: Phys. Rev. 114, 739 (1955). — [9] BOND, W. L.: Rev. Sci. Instrum. 22, 344 (1951). — [10] DILLON, J. F.: Phys. Rev. 112, 59 (1958).

Dr. rer. nat. FRITZ SCHNEIDER,
AEG-Forschungsinstitut Berlin-Reinickendorf

Entwicklung optimaler Breitband-Rundstrahl-Antennen

Von HANS GEORG WAHSEILER

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 23. Mai 1960)

Das Problem einer Anpassung der Antennenimpedanz an den Innenwiderstand des speisenden Generators ist weitgehend gleichbedeutend mit dem Problem, solche Antennen zu finden, die

α) zufolge ihrer geometrischen Form über mehrere Oktaven an den reellen Wellenwiderstand der Speiseleitung möglichst gut angepaßt sind.

Zugleich sollen aber auch

β) die Strahlungsdiagramme dieser Antennen in demselben breiten Frequenzband nahezu frequenzunabhängig sein.

Diese Forderungen sind deshalb schwer zu erfüllen, weil sie unter der Nebenbedingung gestellt werden, daß

γ) das Verhältnis $\frac{\text{Antennenhöhe}}{\text{längste Betriebswellenlänge}}$ klein sein soll.

Ziel dieser Arbeit war nun die Entwicklung von Rundstrahlern, die die Forderungen α) bis γ) erfüllen¹.

In den ersten beiden Kapiteln der Arbeit wird eine Methode hergeleitet, nach der man ohne übermäßigen Rechenaufwand Rundstrahler finden kann, die den Forderungen α) und γ) genügen. Anschließend wird eine Schar Rundstrahler (mit verschiedenem Wellenwiderstand) besprochen, die nach dieser Methode gewonnen wurde. Das letzte Kapitel bringt dann eine

Theorie der Strahlungsdiagramme dieser rotations-symmetrischen Antennen. Aus ihr geht hervor, daß die entwickelten Formen auch die Forderung β) erfüllen.

Rotationssymmetrie bedeutet für unseren Zweck kaum eine Beschränkung, da jede Abweichung davon eine unnötige Inhomogenität der als Leitung gefaßten Antenne darstellt und in der Regel eine Verringerung des maximalen Stehwellenverhältnisses am Antenneneingang bewirken wird. Auch un stetige Konturtangente bedeutet eine ungewünschte Inhomogenität. Darum darf man voraussetzen, daß optimale Breitbandantennen außerhalb des Spektralspektrums eine stetige Konturtangente haben (etwa im Gegensatz zu den Kegelantennen). Ferner wollen wir voraussetzen, daß die zu betrachtenden Antennen körper konisch in den Speisepunkt einmünden, so daß sie von sich aus asymptotisch für hohe Frequenzen einen reellen Eingangswiderstand besitzen. Dann können wir gegebenenfalls eine Umgebung des Aufspulungspunktes der Widerstandsortskurve (Befriedigung von α) ausnutzen und gewinnen so Antennen mit Hochpaßcharakter, die im Idealfall über ein zu hohen Frequenzen hin unbeschränktes Frequenzband an einen reellen Widerstand gut angepaßt sind.

Abb. 1 zeigt einen Meridianschnitt durch eine dieser Voraussetzungen entsprechende Antenne. Hier mit einer nahezu sphärischen „Kappe“ versehen wurde. r, ϑ sind Kugelkoordinaten. Der vom Magnetfeld erfüllte Raum ist in Abb. 1 in einen „Innenraum“ I und in einen „Außenraum“ II unterteilt worden. Beide Räume grenzen in der „Apertur“ ($r=a, \vartheta<\vartheta<\pi/2$) aneinander. Die

¹ Nach Fertigstellung dieser Arbeit erschien eine Arbeit von H. MEINKE [NTZ 13, 161 (1960)], die unsere Ergebnisse stützt, soweit sie sich mit den gleichen Problemen befaßt. Die hier vorgelegte Arbeit führt über die von H. MEINKE veröffentlichte hinaus, da hier 1. zu mehreren Antennenöffnungswinkeln optimale Formen angegeben werden, 2. auch deren Strahlungsdiagramme untersucht werden und insbesondere 3. eine eingehende theoretische Behandlung des Problems vorgelegt wird.

radius a ist ziemlich willkürlich, sei aber zunächst offen, daß die Oberfläche des Antennenkörpers um I nicht allzustark von dem in Abb. 1 gezeichneten angedeuteten Konus abweicht, hingegen im II nicht allzustark von einer Kugelkalotte mit radius $r=a$. Der Aperturbegriff ist für das letzte Teil dieser Arbeit von besonderer Bedeutung.

1. Änderung des Reflexionskoeffizienten infolge einer Formvariation

Am Anfang dieses Kapitels wird die „Wellen-“ in Koordinaten hergeleitet, die dem statischen elektrischen Feld unserer Antenne angepaßt sind. Dieses Koordinatensystem ist für die näherungsweise Separation einer TEM-Welle angemessen. Diese näherungsweise Separation läßt sich mit einfacher Fourier-Ansätze für die in der „Wellen-“ auftretenden Ortsfunktionen erreichen. Es zeigt, daß die TEM-Welle in großer Näherung Telegraphengleichung für den Strom auf einer homogenen Leitung befriedigt. Jedoch soll hier nicht die TEM-Welle selbst, sondern nur ihre Änderung infolge einer kleinen Variation der Antennenform in „leitungstheoretischer“ Behandlung werden. Als Maß für die Formvariation wird die durch sie bedingte relative Änderung des Wellenwiderstandes benutzt. Durch die TEM-Wellenänderung im Speisepunkt ist unmittelbare Änderung des dortigen Reflexionskoeffizienten gegeben. Wegen der Kleinheit der Formvariation kann ein einfacher Ausdruck für die Abhängigkeit der Reflexionskoeffizientenänderung von der relativen Wellenwiderstandsänderung hergeleitet werden.

1.1.

Wir denken uns also für das folgende die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ (φ = Azimut) in Abb. 1 ersetzt durch ein System krummliniger rotationssymmetrischer Orthogonalkoordinaten u, v, φ , das so gewählt wird, daß die Schirmebene ($\vartheta = \pi/2$) durch $v=0$ und die Kontur des Antennenkörpers durch $v=d$ beschrieben wird. u habe im Antennenspeisepunkt den Wert Null. Nachher wird dann gezeigt, wie wir es erreichen können, daß in dem die Antenne umgebenden Raum (Luft) die Linien $u=\text{const}$ eines Meridianschnittes das statische elektrische Feld beschreiben und die Linien $v=\text{const}$ mit Äquipotentiallinien zusammenfallen.

Wir denken uns durch die Antenne ein Strahlungssystem elektrischen Typs erzeugt. Infolge der Rotationssymmetrie unserer Antenne sind dann $\mathcal{E}_u, \mathcal{E}_v$, die einzigen nicht identisch verschwindenden Komponenten dieses Feldes. Bei Wahl eines Zeitpunktes $e^{+i\omega t}$ lauten die Maxwell'schen Gleichungen in u, v geschrieben [1]:

$$\frac{1}{V \varrho} \frac{\partial (\mathcal{H}_\varphi \cdot \varrho)}{\partial v} = i\omega \varepsilon_0 \mathcal{E}_u, \quad (1a)$$

$$-\frac{1}{\varrho U} \frac{\partial (\mathcal{H}_\varphi \cdot \varrho)}{\partial u} = i\omega \varepsilon_0 \mathcal{E}_v, \quad (1b)$$

$$\frac{1}{UV} \left[\frac{\partial (\mathcal{E}_v V)}{\partial u} - \frac{\partial (\mathcal{E}_u U)}{\partial v} \right] = -i\omega \mu_0 \mathcal{H}_\varphi. \quad (1c)$$

und V sind durch die Beziehung

$$ds^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2 + \varrho^2 d\varphi^2 \quad (2)$$

für das Längenelement ds definiert. ϱ bezeichnet den Abstand von der Rotationsachse.

Die Divergenz der elektrischen und magnetischen Feldstärke verschwindet zufolge der Rotationssymmetrie und wegen der Gln. (1a), (1b).

Einsetzen von (1a) und (1b) in (1c) liefert mit

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (3)$$

die „Wellengleichung“:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{V}{\varrho U} \frac{\partial (\mathcal{H}_\varphi \cdot \varrho)}{\partial u} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{U}{V \varrho} \frac{\partial (\mathcal{H}_\varphi \cdot \varrho)}{\partial v} \right] + \left\{ \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + k^2 \right\} \mathcal{H}_\varphi = 0. \quad (4)$$

Wir setzen nun zur Abkürzung:

$$\varrho_0 = \frac{d}{2\pi} \frac{\int \mu_0}{Z_A \varepsilon_0}. \quad (5)$$

Z_A bezeichnet den Wellenwiderstand einer (unendlich langen) Kegelleitung, welche den gleichen Öffnungs-

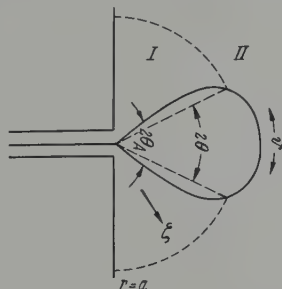


Abb. 1. Meridianschnitt durch eine Antenne

winkel ($2\theta_A$) besitzt wie unsere Antenne. Durch $v=d$ wird die Kontur des Antennenkörpers beschrieben.

Ferner definieren wir:

$$G = \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^2, \quad (6a)$$

$$F = U^2, \quad (6b)$$

$$\tilde{\mathfrak{W}} = \frac{Z_A}{ik} \frac{\varrho}{\varrho_0} \mathcal{H}_\varphi. \quad (7)$$

Wir fordern nun, daß $F(u, v) \rightarrow 1$ für $u \rightarrow 0$, so daß jedenfalls in der konischen Umgebung des Speisepunktes unserer Antenne die Linien $u=\text{const}$ eines Meridianschnittes das statische elektrische Feld eines Kegels beschreiben.

Durch den Ansatz

$$\frac{V}{U} = \frac{\varrho}{\varrho_0} \quad (8)$$

erreichen wir, daß durch $v=\text{const}$ in dieser Speisepunktumgebung Äquipotentialflächen der Antenne beschrieben werden. Wegen (8) besitzen dann aber (z. B. nach [2], S. 156ff.) die Koordinaten u und v die gerade genannte Bedeutung auch im ganzen Strahlungsraum.

Verstehen wir nun unter \mathfrak{L} den Differentialoperator

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(G \frac{\partial}{\partial v} \right) + k^2 F, \quad (9a)$$

so können wir wegen (6), (7) und (8) an Stelle von (4) auch schreiben:

$$\mathfrak{Q} \tilde{\mathfrak{W}} = 0. \quad (9)$$

Wir haben damit die „Wellengleichung“ in dem nach der physikalischen Anschauung für die näherungsweise Separation einer TEM-Welle angemessenen Koordinatensystem hergeleitet.

Gl. (9) bildet den eigentlichen Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen dieses Kapitels.

1.2.

Man kann jetzt für $\tilde{\mathfrak{W}}$ z.B. folgenden Fourier-Ansatz machen:

$$\tilde{\mathfrak{W}} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathfrak{W}}_n(u) \cdot \cos \frac{\pi n v}{d}. \quad (10a)$$

Wegen (1a) erfüllt dieser die elektrische Randbedingung auf der Kontur $v=d$ sowie in der Schirmebene $v=0$.

$\tilde{\mathfrak{W}}_0(u)$ repräsentiert die TEM-Welle.

Ferner entwickeln wir die aus Symmetriegründen in v geraden Funktionen F und G nach FOURIER:

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(u) \cdot \cos \frac{\pi m v}{d}, \quad (10b)$$

$$G = \sum_{m=0}^{\infty} G_m(u) \cdot \cos \frac{\pi m v}{d}. \quad (10c)$$

Mit Hilfe der Darstellungen (10) läßt sich (9) unter Benutzung des Additionstheorems der trigonometrischen Funktionen in die Gestalt bringen:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{M}_j(\tilde{\mathfrak{W}}_n) \cdot \cos \frac{\pi j v}{d} = 0$$

mit

$$\mathcal{M}_j(\tilde{\mathfrak{W}}_n) = \frac{d^2 \tilde{\mathfrak{W}}_j}{d u^2} + \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\varepsilon_j}{2} \right) \left(k^2 F_0 - \left(\frac{\pi j}{d} \right)^2 G_0 \right) + \frac{\varepsilon_j}{2} \left(k^2 F_{2j} + \left(\frac{\pi j}{d} \right)^2 G_{2j} \right) \right] \tilde{\mathfrak{W}}_j + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq j}}^{\infty} \Phi_{j,n}(u) \tilde{\mathfrak{W}}_n(u). \quad (11a)$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\Phi_{j,n}(u) = \frac{\varepsilon_j}{4} \left[k^2 (F_{|j-n|} + F_{j+n}) - \left(\frac{\pi j}{d} \right) \left(\frac{\pi n}{d} \right) (G_{|j-n|} - G_{j+n}) \right],$$

ε_j = Neumannsche Zahl: $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_j = 2$ für $j = 1, 2, 3, \dots$

Für solche u -Werte, für die der Durchmesser des Antennenkörpers nicht verschwindet, sind die Funktionen (10) im ganzen Entwicklungsintervall stetig. Ihre Fourier-Koeffizienten gehen dann mit wachsendem n mindestens wie n^{-2} gegen Null [3], und die unendliche Reihe in (11a) konvergiert absolut für $j < \infty$.

Die Forderung

$$\mathcal{M}_j = 0 \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

führt nun auf ein unendliches System gekoppelter Differentialgleichungen für die $\tilde{\mathfrak{W}}_n(u)$, dessen erste Gleichungen in expliziter Form schon von MEINKE [4] auf anderem Wege hergeleitet wurden und an dessen Bezeichnungweise ich mich hier angelehnt habe.

Für den in dieser Arbeit verfolgten Zweck erübrigt sich eine vollständige Lösungstheorie für das

Gleichungssystem (11), und es genügen die folgenden Überlegungen:

Dem Differentialgleichungssystem (11) ist Integralgleichungssystem

$$\tilde{\mathfrak{W}}_j = \tilde{\mathfrak{W}}_j^{\text{hom}} + \int_0^{v_{\max}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j,n}(u') \tilde{\mathfrak{W}}_n(u') \right) \mathfrak{G}_j(u; u')$$

äquivalent. Hier bezeichnet $\tilde{\mathfrak{W}}_j^{\text{hom}}$ eine in stetige Lösung der homogenen Gleichung $\mathcal{M}_j = 0$. Falle des unendlich langen Kegels, für den $u =$ Speisepunktsabstand und $G_0 \sim 1/r^2$ ist, sind die mit $j \geq 1$ von der Gestalt $c_j \sqrt{kr} J_p(kr)$ ($J_p =$ Besselsche Funktion p -ter Ordnung, $c_j =$ Konstante) und halten sich also in einer genügend kleinen Speisepunktumgebung wie $c_j(kr)^{p+1/2}$ mit $p > \frac{1}{2}$ und asymptotisch für große j . Allgemein kann man $\tilde{\mathfrak{W}}_j^{\text{hom}}$ mit $j \geq 1$ als „Hohlleiterwellen mit ortsabhängiger Grenzfrequenz“ charakterisieren. Die Grenzwertlänge für den Schwingungstyp mit dem Index j beträgt etwa $2r$.

Für die Weitwinkel-Konusantenne sind nun bekanntlich [5] die höheren Schwingungstypen gegenüber der TEM-Welle ($j=0$) im „Innenraum“ von geringer Bedeutung. Das berechtigt uns, wenigstens für Wellenlängen größer als $2a$ ($a =$ Aperturradius) die $\tilde{\mathfrak{W}}_j^{\text{hom}}$ mit $j \geq 1$ bei unseren Antennen konsequent vernachlässigen.

Mit $\mathfrak{G}_j(u; u')$ wurde vorhin die der homogenen Gleichung $\mathcal{M}_j = 0$ und ihren Randbedingungen genügende Greensche Funktion bezeichnet. Gliedweise Integration von $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{j,n} \tilde{\mathfrak{W}}_n \mathfrak{G}_j$ führt beim unendlich langen

Kegel auf eine Reihe, deren Glieder, wie man leicht überlegen kann, mit wachsendem n mindestens wie n^{-3} gegen Null gehen.

Beim unendlich langen Kegel, der auch durch $F_0 = 1$, $F_n = 0$ für $n \geq 1$ charakterisiert werden kann, sind aber die $\tilde{\mathfrak{W}}_j$ mit $j \geq 1$ wegen $\Phi_{j,0} = 0$ von der TEM-Welle entkoppelt. Im Falle $\tilde{\mathfrak{W}}_0^{\text{hom}} = 0$ für $u > a$ werden sie also gar nicht angeregt. Daraus kann man schließen, daß bei unserer Antenne im Teilraum I (Abb. 1), wo $|F_n| \ll F_0$ für $n \geq 1$ ist, die $|\tilde{\mathfrak{W}}_n|$ mit wachsendem n bei genügend niedrigen Frequenzen klein gegen F_0 sind. Beachtet man noch die rasche Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} F_n \tilde{\mathfrak{W}}_n$, so erkennt man daß

Bemerkung a): jedenfalls bei genügend niedrigen Frequenzen im Teilraum I (Abb. 1) die Inhomogenen der Differentialgleichung

$$\mathcal{M}_0 = 0; \quad \mathcal{M}_0 = \frac{d^2 \tilde{\mathfrak{W}}_0}{d u^2} + k^2 F_0 \tilde{\mathfrak{W}}_0 + \frac{k^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \tilde{\mathfrak{W}}_n$$

vernachlässigt werden kann.

In dieser Näherung wird Gl. (12) äquivalent mit dem bekannten „Telegraphengleichung“ für den Strom I in einer inhomogenen Leitung. Um das besonders deutlich zu machen, ersetzen wir zunächst die Variablen u durch die reduzierte „mittlere wahre Länge“

$$\zeta = \frac{1}{l} \int_0^u \sqrt{F_0} du.$$

Unter l möge die Gesamtkonturlänge der betrachteten Antenne verstanden werden; und F_0 berechnet

WACKER

Reinst-Silicium

für Leistungselektroden

Dioden

Transistoren

Infrarotoptik

monokristallin

p-Typ höchstreines Material, tiegellos hergestellt

Spezifischer Widerstand 700 - 5000 Ohmcm

Durchmesser vorzugsweise 18 - 19 mm

Orientierung 111

p- und n-Typ

Spezifischer Widerstand 0,075 - 700 Ohmcm

Durchmesser vorzugsweise 18 - 19 mm

Orientierung 111

polykristallin

in Stabform

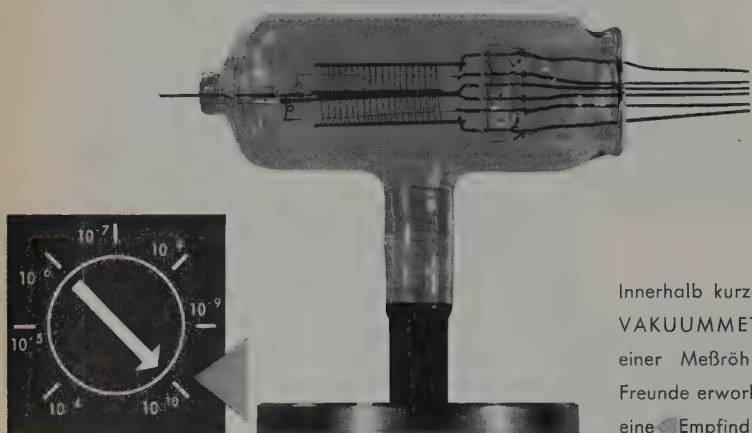
Durchmesser vorzugsweise 17 - 20 mm

Länge 350 - 400 mm

Bei Anfragen bitten wir um Bekanntgabe spezieller Wünsche.

WACKER-CHEMIE GMBH MÜNCHEN

VAKUUM-MESSTECHNIK

Heraeus


ULTRAHOCH- VAKUUMMETER VM-U

Innerhalb kurzer Zeit hat sich das ULTRAHOCH-VAKUUMMETER, ein Ionisations-Vakuummeter mit einer Meßröhre nach Bayard-Alpert, zahlreiche Freunde erworben. Jetzt wurde der Meßbereich um eine Empfindlichkeitsstufe erweitert und die Möglichkeit geschaffen, den Emissionsstrom kontinuierlich zwischen 0,05 und 10 mA einzustellen.

Die Meßröhre wird zum Anblasen an Hartglasapparaturen oder zum Anflanschen an Metallapparaturen geliefert.

Heraeus

EDELMETALLE
ELEKTROWARME
HOCHVAKUUM
QUARZGLAS
APPARATEBAU



Dies ist nur ein Beispiel aus unserem Meßgeräteprogramm.
Wir beraten Sie gerne bei allen Ihren Vakuum-Meßproblemen.

W. C. HERAEUS GMBH · ABT. HOCHVAKUUM · HAN

(10b) zu:

$$F_0 = \frac{1}{d} \int_0^d F(u, v) dv. \quad (14)$$

(13) folgt aus (12):

$$\frac{d \log \sqrt{F_0}}{d \zeta} \mathfrak{B}_0' + k^2 l^2 \mathfrak{B}_0 = -\frac{k^2 l^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{F_0} \mathfrak{B}_n. \quad (15)$$

Zeichen \sim über den Symbolen \mathfrak{B}_n ist fortgelassen, dadurch anzudeuten, daß die \mathfrak{B}_n — wie im folgenden stets — als Funktionen von ζ aufgefaßt werden. ' bedeutet Ableitung nach ζ .

Bemerkung b): In der Näherung von Bemerkung a) ist sinnvoll, die TEM-Welle \mathfrak{B}_0 als „Strom auf der inhomogenen Leitung aufgefaßten Antenne“ zu bezeichnen:

Nach (10a) und (7) ist \mathfrak{B}_0 ja proportional dem v genommenen Mittel der magnetischen Feldkomponente \mathcal{H}_v und stimmt bei geeigneter Vorkonstantenwahl und Normierung, soweit die Summe der n Schwingungstypen gegenüber \mathfrak{B}_0 vernachlässigbar ist, mit dem wirklichen Strom auf der Antennenoberfläche überein.

In der Näherung von Bemerkung a) muß dann die Gl. (15) mit der „Telegraphengleichung“ für den Strom i in einer inhomogenen Leitung übereinstimmen. Der Vergleich von (15) mit der üblichen Darstellung der Telegraphengleichung“ lehrt dann, daß $Z_A \sqrt{F_0}$ gerade als Definition für den ortsabhängigen Wellenwiderstand der Antenne angesehen werden kann. Auf Grund seiner geometrischen Bedeutung ist $\sqrt{F_0}$ ja in der Tat umgekehrt proportional dem Kapazitätsbelag der Antenne. [Z_A hat hier die gleiche Bedeutung wie in (10) und kann auch als „Wellenwiderstand im Speisepunkt“ bezeichnet werden.]

In dieser Stelle kommt es uns aber nicht auf einen Ausdruck für \mathfrak{B}_0 in „leitungstheoretischer Näherung“ an, sondern wir werden lediglich eine *kleine Änderung* in \mathfrak{B}_0 , die durch eine leichte Konturvariation verursacht wurde, in dieser Näherung behandeln. \mathfrak{B}_0 ist dabei zunächst als exakt bekannt angenommen. Speziell ist dann natürlich auch die Antennenimpedanz der unveränderten Form genau bekannt, denn diese berechnet sich zu:

$$\frac{\Re}{Z_A} = -\frac{1}{i k l} \frac{\mathfrak{B}_0'(0)}{\mathfrak{B}_0(0)}. \quad (16)$$

Es gewinnt (16), indem man für den Strom in Speisepunkt die Nähe den Wert $2\pi i k \mathfrak{B}_0 \epsilon_0 / Z_A$ und für die Spannung längs einer Koordinatenlinie $u = \text{const}$ in der Nähe des Speisepunktes unter Beachtung von (1b) den Wert

$$V dv = -\frac{d}{Z_A l} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathfrak{B}_0' \text{ zugrunde legt.}$$

1.3.

Als Maß für die Formvariation soll die durch sie bewirkte relative Änderung des „ortsabhängigen Wellenwiderstandes“ $Z_A \sqrt{F_0}$ benutzt werden, die wir mit $f(\zeta)$ bezeichnen wollen. Es sei $|f| \ll 1$.

Neben einer Antenne mit dem „Wellenwiderstand“ $Z_A \sqrt{F_0}$ und einer TEM-Welle \mathfrak{B}_0 betrachten wir dann auch eine im Teilraum I leicht variierte Form mit dem Wellenwiderstand“ $(1+f) Z_A \sqrt{F_0}$. Auf dieser Antenne beobachtet man eine TEM-Welle $\mathfrak{B}_0 + w$, die

sich um das kleine Zusatzglied w von der ursprünglichen TEM-Welle unterscheidet.

Außer Gl. (15) muß dann noch folgende Differentialgleichung betrachtet werden:

$$\left. \begin{aligned} w'' + \frac{d \log \sqrt{F_0}}{d \zeta} w' + k^2 l^2 w = -\frac{d \log (1+f)}{d \zeta} \mathfrak{B}_0' + \\ + \left[-\frac{d \log (1+f)}{d \zeta} w' + \right. \\ \left. + \text{Änderung von } \left(-\frac{k^2 l^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{F_0} \mathfrak{B}_n \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wenn man nur einen Hinweis sucht, wie eine gegenüber der ursprünglichen Form widerstandsmäßig breitbandigere Antennenform beschaffen sein muß, kann man sich bei der Bestimmung der kleinen Störfunktion w sicher mit einer Näherungsrechnung begnügen.

Im Blick auf unsere Voraussetzung $|f| \ll 1$ und auf Bemerkung a) wollen wir deshalb die zweite und dritte Zeile der Gl. (17) als von höherer Ordnung klein vernachlässigen.

Die allein interessierende Partikulärlösung von (17) lautet bei dieser Vernachlässigung:

$$w = \int_0^{\zeta_{\max}} \frac{d \log (1+f)}{d \zeta} \mathfrak{B}_0'(\zeta) \cdot \Gamma(\zeta; \zeta') d \zeta'. \quad (18)$$

Mit Γ ist die der linken Seite von (17) gemäß Green-sche Funktion bezeichnet. Die obere Integrationsgrenze werden wir später genau festlegen.

Im Raum I der Abb. 1, wo $F_0 \approx \text{const}$, wird für unsere Breitbandantennen¹ der aus der homogenen Gl. (15) gewonnene Ansatz

$$\mathfrak{B}_0 = \exp \{-i k l \zeta'\} \quad (19a)$$

zur Berechnung der Störfunktion w ausreichen.

Außerdem kann hier

$$\Gamma = \frac{1}{2 i k l} \exp \{-i k l |\zeta - \zeta'|\} \quad (19b)$$

gesetzt werden.

Mit der Bezeichnung

$$q = 2 i k l \quad (20)$$

liefert dann (18) für den Funktionswert von w am Antenneneingang:

$$w = \frac{1}{i k l} w' = -\frac{1}{2} \int_0^{\zeta_{\max}} \frac{d \log (1+f)}{d \zeta} e^{-q \zeta} d \zeta \quad (21)$$

(am Orte $\zeta = 0$).

Im folgenden wird ausschließlich der Wert von w am Antenneneingang betrachtet. Da Verwechslungen nicht zu befürchten sind, kann auf die Angabe des Argumentwertes $\zeta = 0$ bei dem Symbol w verzichtet werden. Von jetzt an ist also unter w eine reine Funktion von q (also: der Frequenz) zu verstehen.

Nun hat man wegen (16) für den Reflexionskoeffizienten am Eingang der variierten Antenne:

$$\beta = \frac{-\frac{1}{i k l} \frac{\mathfrak{B}_0'(0) + w'}{\mathfrak{B}_0(0) + w} - 1}{-\frac{1}{i k l} \frac{\mathfrak{B}_0'(0) + w'}{\mathfrak{B}_0(0) + w} + 1}, \quad (22)$$

¹ Bei kleinem Reflexionskoeffizienten der unverformten Antenne kann der reflektierte Anteil der TEM-Welle bei der Berechnung von w unberücksichtigt bleiben.

also mit Rücksicht auf die (linke) Gl. (21):

$$\delta = \delta_K - \frac{-1}{i k l} \frac{2w}{\Re_0'(0) + \Re_0(0)}. \quad (22a)$$

δ_K bezeichnet den am Eingang der unverformten Antenne (also: $w \equiv 0$) gemessenen Reflexionskoeffizienten.

Aus (22a) folgt mit (19a) die fast selbstverständliche Formel:

$$\delta = \delta_K - w, \quad (23)$$

welche besagt, daß die Änderung des Reflexionskoeffizienten infolge der Formvariation in der hier geübten Näherung gleich der negativen Änderung der auf 1 normierten TEM-Welle im Speisepunkt ist.

Und diese negative TEM-Wellenänderung ist nach (21) genähert einfach gleich der Laplace-Transformierten der reellen Funktion:

$$\frac{1}{2} \frac{d \log(1+f)}{d\zeta} \cdot \begin{cases} 1 & \text{in } \langle 0, \zeta_{\max} \rangle, \\ 0 & \text{außerhalb } \langle 0, \zeta_{\max} \rangle. \end{cases}$$

Die Vermutung liegt nahe, daß der Ausdruck (21) auch für Formänderungen eine gute Näherung bedeutet, bei denen Zonen auf der Antennenoberfläche mitverformt werden, die schon außerhalb des Teilraums I der Abb. 1 liegen.

Wir wollen aber im folgenden nur Formvariationen in Betracht ziehen, bei denen

$$f(\zeta) = 0 \quad \text{für } \zeta \geq 1 \quad (24a)$$

gilt.

Deutet man $f(\zeta)$ als „relative Wellenwiderstandsänderung“, so besagt (24a), daß die Form der *äußersten* Antennenkappe nicht geändert werden soll. (Die Antennenhöhe darf allerdings geändert werden.)

Für unseren Zweck bedeutet (24a) sicher keine Beschränkung, da man gegebenenfalls durch einen Vorversuch zunächst einmal eine geeignete Kappenform ermitteln kann.

2. Ein Verfahren zur Ermittlung optimaler Rundstrahlerkonturen

2.1. Eine Formvariation soll dann als optimal angesehen werden, wenn die durch sie bedingte TEM-Wellenänderung zu einem *im Mittel* minimalen Betragsquadrat des Reflexionskoeffizienten führt.

2.2. Es wird ein (endliches) „orthogonales“ Funktionensystem hergeleitet, nach dem sich bei Beschränkung auf reelle Entwicklungskoeffizienten (a) *nur* solche — aber (b) *alle* solche — TEM-Wellenänderungen entwickeln lassen, die durch eine bestimmte Klasse von Wellenwiderstandsänderungen hervorgerufen werden können. Die Eigenschaft (a) garantiert unter anderem, daß eine nach diesem Funktionensystem entwickelte TEM-Wellenänderung auch einer *realisierbaren* Formvariation entspricht, die Eigenschaft (b) tritt hier an die Stelle der gewohnten „Vollständigkeit“.

Die reellen Koeffizienten derjenigen Entwicklung nach diesem Funktionensystem, welche einer optimalen Formvariation entspricht, können wegen 2.1 nach der „Methode der kleinsten Quadrate“ ermittelt werden.

2.3. Das „orthogonale“ Funktionensystem erlaubt auch eine elegante und für das gute Gelingen unsers Verfahrens bedeutungsvolle Methode zur Realisierung einer optimalen Formvariation.

2.1.

Durch das vorangegangene Kapitel wurde ein folgender Weg zur Ermittlung einer für ein vorgegebenes Frequenzband widerstandsmäßig optimalen Antenne nahegelegt:

Man wählt eine (der angestrebten Form möglichst nahe kommende) Ausgangsform, mißt deren Reflexionskoeffizienten δ_K und sucht dann unter Beachtung von (21) diejenige Funktion $f(\zeta)$ zu finden, für die $\text{Max} \{|\delta_K - w|\}$ (und damit auch das maximale Streuwellenverhältnis) in dem vorgegebenen Frequenzband möglichst klein wird.

Dagegen ist aber zunächst einmal folgender Einwand zu machen: Es ist denkbar, daß dieser Weg zur Ermittlung einer optimalen Form führt, deren „Wellenwiderstand im Speisepunkt“ so klein ausfällt, daß diese Form die Praxis unbrauchbar ist.

Aus diesem Grunde ist es zweckmäßig, bei der Suche nach einer optimalen Formvariation Funktionen $f(\zeta)$ in Betracht zu ziehen, die einer geeigneten Nebenbedingung genügen. Als solche wird im folgenden benutzt:

$$f(0) = 0. \quad (24b)$$

Bei dieser schwachen Nebenbedingung muß man sich der Regel den „Wellenwiderstand“ der Ausgangsform immer noch etwas verschieden wählen von dem, an den man optimale Anpassung erreichen will. Dies kann aber ein Iterationsverfahren zur Bestimmung einer optimalen Form nicht in sinnvoller Weise verhindern. Da aber (24b) einen Verstoß gegen die Voraussetzung $|f| \ll 1$ verhindert, ist ein solches Verfahren auch überflüssig.

Unter Beachtung der Nebenbedingungen (24a) und (24b) sowie unserer Voraussetzung $|f| \ll 1$ folgt übrigens aus (21) durch partielle Integration:

$$w = -\frac{1}{2} q \int_0^1 f(\zeta) e^{-q\zeta} d\zeta.$$

Ein zweiter Einwand gegen den oben skizzierten Weg zur Bestimmung optimaler Funktionen $f(\zeta)$ gilt aus rechentechnisch unbequemen Forderung nach möglichst kleinem $\text{Max} |\delta|$.

Wir wollen für das folgende lieber die schwächere Forderung stellen, daß

$$\left\{ |\delta|^2 = \text{minimal im Mittel über ein vorgegebenes Frequenzband.} \right\}$$

Im übrigen wollen wir noch Gl. (23) dahingehend allgemeiner, daß wir einen in der Frequenz linear (reduzierten) Leitwert

$$y_0 = z_0 + q y_0$$

berücksichtigen, dessen Blindanteil etwa durch solche Maßnahmen am Speisepunkt erzeugt werden kann, denen sich das elektromagnetische Feld nur in einem Bereich ändert, dessen Durchmesser klein gegenüber der Wellenlänge ist. Dann mißt man am Antennen-
eingang

$$\delta \approx \delta_K - w - \frac{1}{2} y_0.$$

Erweiterung von (23) kann unter Umständen hilfreich sein, da sich so eventuell ein kleinerer Maximalwert von $\text{Max} |\delta|$ erreichen läßt als im Falle (23). Doch wird man dann gewöhnlich auf Formen zurückgreifen, deren Widerstandsortskurven um Punkte der Widerstandsebene konzentriert sind, die nicht auf der reellen Achse liegen — jedenfalls, solange man sich nicht für $\text{Im } v_0$ durch die erwähnte Maßnahme am Speisepunkt realisiert hat.

Da jene Schwerpunkte in der Widerstandsebene identisch sein können mit den für hohe Frequenzen asymptotischen Eingangswiderständen unkonisch in den Speisepunkt einmündenden Strahlen, wird deutlich, daß die eben gemachte Erweiterung von (23) allerdings nur bei Beschränkung auf übermäßig breite Frequenzbänder von Nutzen sein kann.

Unter Beachtung von (28) kann man die Forderungen (26) auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{|q_2| - |q_1|} \int_{|q_1|}^{|q_2|} d|q| \left| \delta_K - \frac{1}{2} v_0 - w \right|^2 = \min. \quad (29)$$

Um zu vermeiden, daß der Integrand an den Rändern des interessierenden Frequenzbandes unerwünscht hohe Werte annimmt, läßt man zweckmäßig den Integrationsbereich beiderseits etwas über das interessierende Frequenzband hinausreichen.

2.2.

Man läßt sich jede im Intervall $0 \leq \zeta \leq 1$ stetige Funktion $f(\zeta)$, die den Bedingungen (24a), (24b) genügt, in diesem ζ -Intervall durch folgende Fourier-Reihe mit reellen Koeffizienten darstellen:

$$f = \sum_{l=1}^{\infty} \kappa_l \cdot \sin \pi l \zeta. \quad (30)$$

Man setzt mit diesem Ansatz in (25) ein, so folgt aus der Linearität von (25) eine Darstellung

$$w = \sum_{l=1}^{\infty} \kappa_l v_l. \quad (31)$$

Man bezeichnet $-\frac{2}{q} v_l$ die Laplace-Transformierte der Funktion

$$\begin{cases} \sin \pi l \zeta & \text{für } 0 \leq \zeta \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann nun die Aufgabe, eine optimale, den Nebenbedingungen (24a), (24b) genügende „Formvariation“ $f(\zeta)$ aufzusuchen, auch folgendermaßen formulieren:

Die reellen Koeffizienten κ_l ($l=1, 2, 3, \dots$) in (30) so zu bestimmen, daß unter Beachtung von (31) die Forderung (29) erfüllt wird.

Die „Endgültigkeit“ der zu bestimmenden Koeffizienten ist aber nur gesichert, wenn an Stelle von (31) die Entwicklung

$$w = \sum_{\nu=1}^{\infty} K_{\nu} w_{\nu} \quad (32)$$

an Funktionen w_{ν} steht, welche gewissen „Orthogonalitätsbedingungen“ genügen, etwa den folgenden:

$$\int_{|q_1|}^{|q_2|} d|q| w_{\nu}^* w_{\mu} = \delta_{\nu\mu}; \quad \nu, \mu = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Dann führt nämlich die Extremwertbedingung $\partial \mathcal{R} / \partial K_{\nu} = 0$ auf die einfache Bestimmungsungleichung

$$K_{\nu} = K_{\nu}^{(0)} + z_0 J_{\nu}^r + y_0 J_{\nu}^i \quad (34)$$

für optimale (reelle) Koeffizienten K_{ν} . Hier sind folgende Abkürzungen benutzt:

$$K_{\nu}^{(0)} = \text{Re} \left\{ \int_{|q_1|}^{|q_2|} d|q| w_{\nu}^* \delta_K \right\}, \quad (35a)$$

$$J_{\nu}^r = \text{Re} \left\{ \int_{|q_1|}^{|q_2|} d|q| |w_{\nu}|^2 \right\}, \quad (35b)$$

$$J_{\nu}^i = \text{Im} \left\{ \int_{|q_1|}^{|q_2|} d|q| |q| \cdot |w_{\nu}|^2 \right\}. \quad (35c)$$

Es ist also zweckmäßig, sich ein im Sinne von (33) „orthogonales“ Funktionensystem $\{w_{\nu}\}$ zu beschaffen.

Bei der Konstruktion eines solchen Funktionensystems ist jedoch zu beachten:

a) Es darf nur aus solchen komplexen Funktionen w_{ν} bestehen, die sich auch (bis auf einen reellen Faktor) als TEM-Wellenänderung realisieren lassen — und zwar als eine solche TEM-Wellenänderung, wie sie durch eine der Nebenbedingungen (24) genügende „Formvariation“ hervorgerufen werden kann.

b) Nach den w_{ν} muß sich jede durch eine interessierende „Formvariation“ erzeugbare TEM-Wellenänderung entwickeln lassen.

Uns interessieren übrigens gar nicht alle, den Nebenbedingungen (24) genügenden und für $0 \leq \zeta \leq 1$ in eine Fourier-Reihe entwickelbaren Funktionen $f(\zeta)$.

Aus physikalischen Gründen können wir uns auf die Betrachtung im ganzen Entwicklungsintervall stetiger, nur langsam veränderlicher Funktionen $f(\zeta)$ beschränken, und diese brauchen nur mit der Genauigkeit bekannt zu sein, mit der sie sich realisieren lassen. Ein Fehler bei der Angabe dieser Funktionen, der keinen meßbaren Fehler für den Wert der Funktion w zur Folge hat, ist ebenfalls belanglos.

Diesem Sachverhalt wird in etwa folgende Erklärung gerecht:

c) Es interessieren nur solche „Formvariationen“ $f(\zeta)$, die den Nebenbedingungen (24) genügen und in $0 \leq \zeta \leq 1$ durch die N -te Partialsumme einer Entwicklung (30) darstellbar sind.

Dabei ist die Wahl der natürlichen Zahl N etwas willkürlich, aber erfahrungsgemäß unkritisch. In der Praxis wurde hier $N=4$ bzw. $N=6$ gesetzt.

Um der Bedingung (a) sowie der Bedingung (b) — unter Berücksichtigung von (c) — zu genügen, schlagen wir zur Konstruktion des „orthogonalen Funktionensystems“ $\{w_{\nu}\}$ den folgenden Weg ein:

Wir gehen aus von der N -ten Partialsumme von (30) mit beliebigen reellen Koeffizienten κ_l [d.h. von einem beliebigen der interessierenden $f(\zeta)$].

Diese Summe denken wir uns in folgender Weise umgeordnet:

$$\sum_{\nu=1}^N K_{\nu} \varphi_{\nu}(\zeta) \quad (36)$$

mit

$$\varphi_{\nu}(\zeta) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu-1}{2} \right]} \gamma_j^{(\nu)} \sin(\pi(\nu-2j)\zeta); \quad \nu=1, 2, \dots, N. \quad (36a)$$

Diese Umordnung ist möglich, wenn $\prod_{\nu=1}^N \gamma_j^{(\nu)} \neq 0$.

Die $\gamma_j^{(\nu)}$ bezeichnen irgendwelche reelle Zahlen. $\left[\frac{\nu-1}{2}\right]$ bedeutet die nächste ganze Zahl, die kleiner oder gleich $\frac{\nu-1}{2}$ ist.

Nach (25) berechnet man mit $f = \varphi_\nu$ und φ_ν nach (36a):

$$w_\nu(q) = \frac{1}{2} [1 - e^{-i(|q|-\nu\pi)}] \cdot \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \gamma_j^{(\nu)} \frac{q \cdot (\nu-2j) \pi}{|q|^2 - (\nu-2j)^2 \pi^2} \cdot (37)$$

Das ist ein unseren Bedingungen genügendes „orthogonales“ Funktionensystem, falls die reellen Zahlen $\gamma_j^{(\nu)}$ so festgelegt werden, daß die Funktionen (37) den Relationen (33) genügen.

Die Bestimmungsgleichungen für die $\gamma_j^{(\nu)}$ lauten:

$$\left. \begin{aligned} \Re \left\{ \int_{|q_1|}^{|q_2|} d|q| w_\nu^* w_\mu \right\} \\ = \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \sum_{k=0}^{\left[\frac{\mu-1}{2}\right]} \gamma_j^{(\nu)} \gamma_k^{(\mu)} D(\nu-2j; \mu-2k) = \delta_{\nu\mu} \end{aligned} \right\} (38)$$

mit

$$D(n; m) = D(m; n) = \frac{1}{4} \frac{n \cdot m}{n^2 - m^2} [\mathfrak{C}(m) - \mathfrak{C}(n)]; \quad m \neq n,$$

$$D(n; n) = -\frac{1}{4} \frac{n}{2} \frac{d}{dn} (\mathfrak{C}(n))$$

und

$$\mathfrak{C}(n) = \pi n \left[\int_{|q_2|-\pi n}^{|q_1|-\pi n} \frac{1 - \cos x}{x} dx + \int_{|q_1|+\pi n}^{|q_2|+\pi n} \frac{1 - \cos x}{x} dx \right].$$

Mit $|q_1| = 2\pi$; $|q_2| = 10\pi$ ergeben sich z. B. folgende Zahlenwerte:

Tabelle 1

	ν	j		
		0	1	2
$\gamma_j^{(\nu)}$	1	1,0738		
	2	0,3256		
	3	0,1778	-0,1334	
	4	0,1309	0,0232	
	5	0,1046	0,0098	0,0356
	6	0,0875	0,0078	0,0240

Die Integrale J_ν^r und J_ν^i entnimmt man der folgenden Tabelle 2:

Tabelle 2

ν	J_ν^r	J_ν^i
1	-0,271	-44,92
2	+0,810	-32,34
3	+1,471	-19,65
4	+1,277	-24,18
5	+1,419	-21,95
6	+1,370	-19,02

Die Funktionen w_ν zu $N=6$ sind sich alle sehr ähnlich:

$\Re w_\nu$ besitzt an der Stelle $|q| = \pi\nu$ eine ausgeprägte Einsattelung, während $\Im w_\nu$ dort eine Nullstelle und kurz davor ein Minimum, unmittelbar dahinter ein ausgeprägtes Maximum hat. Diese Hauptextrema wandern also mit wachsendem Index ν zu höheren

Frequenzen. Dort ist aber erfahrungsgemäß der Einfluß einer Konturänderung auf den Reflexionskoeffizienten nur gering.

Bei der Auswertung von (34) müssen zuerst Integrale (35a) (graphisch) ermittelt werden. Gegebenfalls kann man anschließend aus dem hier unterdrückten Gleichungssystem für optimale Parameter z_0, y_0, z_0 sowie y_0 bestimmen. Mit den nach (34) berechneten Koeffizienten K_i erhält man dann nach (36) optimale „Formvariation“ $f(\zeta)$.

2.3.

Jetzt erhebt sich die Frage, wie man zweckmäßig das errechnete $f(\zeta)$ realisiert. Die rein geometrische Ausdeutung einer Funktion $f(\zeta)$ ist ja mit großem Aufwand verbunden und in speisepunktsferneren Bereichen auch sehr unsicher. Hingegen empfiehlt sich folgender Weg:

Man mißt neben dem Reflexionskoeffizienten der Ausgangsform noch den Reflexionskoeffizienten δ_{exp} einer leicht abgeänderten Form. Aus Gl. (36) mit $w = \delta_K - \delta_{\text{exp}}$ an Stelle von δ_K berechnet man die Koeffizienten $K_{\nu \text{exp}}$, welche gemäß Gl. (36) eine „Formvariation“ f_{exp} bestimmen. Ein Vergleich der angestrebten Funktion f mit f_{exp} zeigt dann, in welchem Sinne man die Kontur der Ausgangsform abzuändern hat, um die gewünschte Realisierung von $f(\zeta)$ zu zielen. Häufig führt schon der erste Schritt zu einem befriedigenden Ergebnis.

Diese Realisierungsmethode trägt wesentlich zum guten Gelingen des entwickelten Verfahrens zur Ermittlung optimaler Konturvariationen bei.

3. Widerstandsmäßig günstige Antennen mit unterschiedlichem Wellenwiderstand

3.1. Die Abhängigkeit des maximalen Stehwellenverhältnisses vom Antennenöffnungswinkel bei Kegellantennen wird kurz erläutert. Es wird ein erster Überblick gegeben über die widerstandsmäßige Breitbandverbesserung bei Vermeidung der unstetigen Konturtangente.

3.2. Zu verschiedenen Antennenöffnungswinkeln zwischen 50 und 110° wurden mit Hilfe der in Kapitel 2 entwickelten Theorie widerstandsmäßig optimale Antennenformen bestimmt. Diese werden besprochen, insbesondere wird ihr Widerstandsverhalten mit dem von Kegellantennen gleicher Öffnungswinkel verglichen.

3.1.

Für die Schar der Kegellantennen (mit gleicher Kegelseite) hat das maximale Stehwellenverhältnis als Funktion des Antennenöffnungswinkels $2\theta_A$ ein absolutes Minimum und zwar für $2\theta_A \approx 70^\circ$ (z. B. [1]).

Das geringere widerstandsmäßige Breitbandverhalten der Kegellantennen mit größerem Öffnungswinkel ist offenbar eine Folge des sog. gap-Problems [7]: Mit zunehmendem Öffnungswinkel wird die Apertur kleiner, so daß die Speiseleitung kurzgeschlossen wird.

Da in unserem Fall aber beliebige Konturformen mit stetiger Konturtangente zugelassen sind, wird die Optimalitätsforderung (26) dafür sorgen, daß der Effekt weitgehend unterdrückt wird. Darum werden

Tabelle 3

$2\theta_A$	Z_A (Ω)	Art der Aus- führung	l (cm)	h (cm)	Untere Grenz- frequenz (GHz)	h λ_{Grenze}	Band- breite	max. SWV	Art der Antennengewinnung
50°	90	Reuse	50	39,6	0,32			1,21	Auswahl aus Konturschar
70°	70	vollwandig	↓	36,5	0,32	0,389	Hochpaß- charakter	1,09	Bestimmung von $f(\zeta)$ derart, daß $ z ^2 = \min$ im Mittel Extrapolation aus den übrigen Formen
80°	60	Reuse		35,0	0,30	0,350		1,13	
90°	54	Reuse		33,6	0,27	0,303		1,11	
110°	40	vollwandig		31,6	0,36	0,379		1,10	
								1,05	

r $2\theta_A > 70^\circ$ ein merklich besseres widerstands-
es Breitbandverhalten unserer Antennen er-
t, als es die Kegelantennen zeigen.

en ersten Überblick über die zu erwartende
andverbesserung bei $2\theta_A = 70^\circ$ gewinnt man
Vergleich der Widerstandskurven zu den in
zusammengestellten Konturen.

handelt sich in Abb. 2 um eine Schar von
enformen zwischen der einfachen Kegelantenne
ffnungswinkel $2\theta_A = 70^\circ$ und einer unter dem
en Winkel in den Speisepunkt einmündenden
Form höheren Schlankheitsgrades.
Die Zwischenformen haben eine ste-
tige Konturtangente, und ihre Kontur-
krümmung wird erst bei größ-
erem Speisepunktabstand merklich.
Die Antenne aus dieser Schar mit
dem besten Breitbandverhalten
kann als eine Ausgangsform bei
der Anwendung der Konstruktions-
methode aus Kap. 2 dienen.

Abb. 3 zeigt die Widerstands-
kurven zu den Formen aus Abb. 2.
(Die scheinbar induktive Lage des
Wellenwiderstandes ist lediglich
durch die Gestaltung der Speise-
punktumgebung bedingt und nicht
von Interesse.)

Man beachte, daß nach Abb. 3
für Frequenzen kleiner als 0,3 GHz
jedenfalls für den Öffnungswinkel
 $2\theta_A = 70^\circ$ keine merkliche Verringerung des maxi-
malen Stehwellenverhältnisses gegenüber dem Kegel
(∞) möglich ist. Wir wollen in etwa diesen Wert
untere „Grenzfrequenz“ beim quantitativen Ver-
der maximalen Stehwellenverhältnisse unserer
strahler betrachten.

eben der Konturschar aus Abb. 2 wurde auch
nach ähnlichen Gesichtspunkten ausgewählte
Formen zur Öffnungswinkel $2\theta_A = 90^\circ$ unter-
[8]. Diese ist von Interesse, da für sie das erste
mal sowohl der R - wie der X -Kurve bei ver-
denen Formen mit stetiger Konturtangente be-
tlich tiefer liegt als dasjenige des zugehörigen
ls. Hier könnte man die untere „Grenzfrequenz“
die Angabe des maximalen Stehwellenverhält-
s) bedenkenlos niedriger wählen als bei $2\theta_A = 70^\circ$.

3.2.

nach diesen Voruntersuchungen wurden dann zu
chiedenen Öffnungswinkeln aus dem interessanten
vall $50^\circ \leq 2\theta_A \leq 110^\circ$ optimale Antennenformen
nmt. Im wesentlichen geschah das nach der im
2 entwickelten Theorie. Doch wurde an Stelle

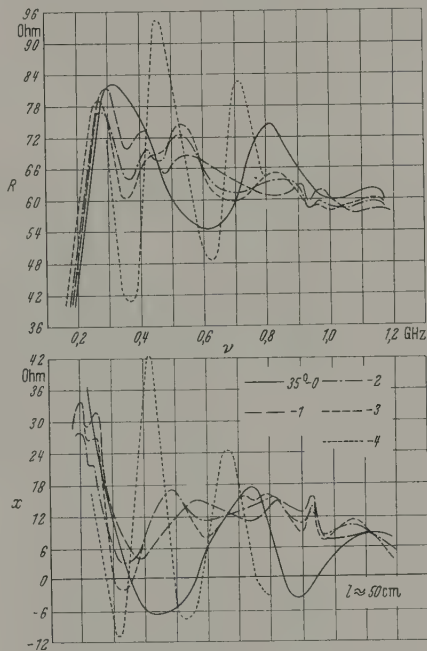


Abb. 3. Widerstandskurven zu den in Abb. 2 dargestellten Formen

der oszillierenden Approximation von $f(\zeta)$ durch (36)
vorwiegend eine im Speisepunkt oskulierende Appro-
ximation verwendet. Dies schien
zunächst sinnvoll, weil die nähere
Umgebung des Speisepunktes die
Antennenimpedanz erfahrungsge-
mäß besonders stark beeinflusst.
Außerdem läßt sich die Bedin-
gung (24b) dann auch leicht da-
hingehend verschärfen, daß man
für $f(\zeta)$ in $\zeta = 0$ eine Nullstelle
höherer Ordnung fordert. Für
unsere Zwecke ist das aber ohne
Bedeutung.

Die entwickelten Konturen
sind in Abb. 4 zusammengestellt.

Aus der Tabelle 3 ersieht man
einige wichtige Daten dieser For-
men.

Insbesondere aus herstellungs-
technischen Gründen wurden die
Messungen normalerweise an
Reusen ausgeführt. Diese bestan-
den aus 24 1mm starken Leicht-
metallstreifen. Für alle Messungen wurde die gleiche
Streifengarnitur verwendet, die einer Konturlänge

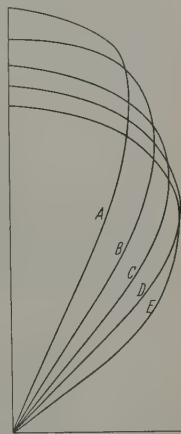


Abb. 4. Schar wider-
standsmäßig optimaler
Antennen

des Antennenkörpers von 50 cm entspricht. Die Äquidistanz der Streifen wurde durch eine Scheibe mit radial ausziehbaren Leisten gesichert. An den Enden der Leisten wurden die Streifen mit versenkten Schrauben befestigt. Die zugehörige Bohrung in den Streifen war so angebracht, daß sie für alle untersuchten Formen in den Bereich nahezu senkrechter Konturtangente fiel. Die Enden der Streifen wurden

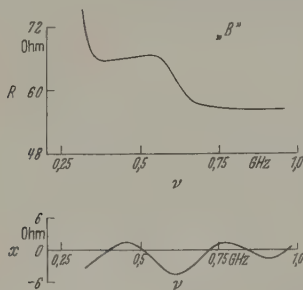


Abb. 5. Impedanz der Form „B“ (vollwandig)

an aus Leichtmetall gedrehten Konusstücken angeschraubt. Dabei wurden Stoßstellen möglichst vermieden. Infolge der vorteilhaften Biegeungssteifigkeit der Leichtmetallstreifen konnten diese nach einer Pappschablone von Hand in die gewünschte Form

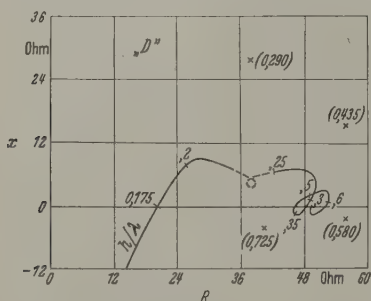


Abb. 6. Widerstands-Ortskurve der Form „D“. (Die Kreuze markieren Meßwerte für die einfache Kegelantenne vom Öffnungswinkel $2\Theta_A = 90^\circ$)

gebogen werden. Für die (recht unkritische) metallische Belegung auf dem Maximalumfang der Antenne galt etwa:

$$0,6 < \frac{24 \times 3 \text{ cm}}{\text{Umfang}} < 0,9.$$

In Tabelle 3 wird am Beispiel der Form „B“ der Unterschied des maximalen Stehwellenverhältnisses einer vollwandig ausgeführten Form gegenüber dem einer Reuse deutlich. Die Widerstandskurve der vollwandig ausgeführten Form „B“ — oberhalb der in der Tabelle 3 genannten Grenzfrequenz — ist in Abb. 5 dargestellt.

Wie nach den in 3.1. erwähnten Vorversuchen zu erwarten war, liegt die Grenzfrequenz der Form „D“ (Öffnungswinkel: 90°) besonders tief. Die Ortskurve dieser Form ist in Abb. 6 wiedergegeben. Die eingezeichneten Kreuze lassen den Verlauf der Ortskurve für den einfachen Kegel des gleichen Öffnungswinkels erkennen. Das Breitbandverhalten der Form „D“ ist in der Tat wesentlich besser als das des Kegels.

In dem von uns betrachteten Θ_A -Intervall ist, soweit dies nach Tabelle 3 beurteilt werden kann, für

die Antennen der optimalen Schar die Aussage „erweiterten Leitungstheorie für Antennen“ [9] richtig, daß das maximale Stehwellenverhältnis mit zunehmendem Wellenwiderstand monoton fällt.

Um einen quantitativen Vergleich mit den maximalen Stehwellenverhältnissen für Kegelantennen ermöglichen, sind in Tabelle 4 die an verschiedenen einfachen Kegelantennen (Reusen) von mir gemessenen maximalen Stehwellenverhältnisse für $h/\lambda \geq 3/8$ angegeben:

Tabelle 4

$2\Theta_A$	Maximaler SWV für $h/\lambda \geq 3/8$ bei der Kegelantenne
50°	1,35
70°	1,22
90°	1,42

4. Die Strahlungsdiagramme unserer Antennen

Im vorangegangenen Kapitel wurde eine Antennenschar angegeben, die den Bedingungen α) und β) von S. 450 genügt. Um die Frage beantworten zu können, ob die Antennen einer solchen Schar auch die Forderung β) von S. 450 erfüllen, müssen wir das Strahlungsdiagramm dieser Antennen kennen.

4.1. Es wird eine Entwicklung nach Kugelfunktionen für die elektrische Feldkomponente \mathcal{E}_θ gegeben, mit deren Hilfe man die Strahlungsdiagramme berechnen kann, wenn die Fourier-Koeffizienten der Feldkomponente \mathcal{E}_θ in der „Apertur“ bekannt sind. Das Aperturfeld, dessen Projektion \mathcal{E}_θ ist nach Kap. 1 nahezu die Richtung des statischen Feldes. Für den Kosinus des Projektionswinkels bei unseren Antennen ein einfacher Ansatz möglich.

4.2. Mit Hilfe dieses Ansatzes ergibt sich, daß die Fourier-Koeffizienten von \mathcal{E}_θ bei unseren Antennen nahezu mit den Fourier-Koeffizienten von \mathcal{E}_θ der Kegelantennen etwas kleineren Öffnungswinkels übereinstimmen. Das Breitbandverhalten der Strahlungsdiagramme von Kegelantennen wird kurz erläutert. Die gute Übereinstimmung der Richtdiagramme unserer Antennen mit denen geeigneter Kegelantennen wurde experimentell bestätigt.

4.1.

Das Strahlungsproblem behandeln wir zweckmäßig in Kugelkoordinaten, die ja dem Fernfeld angemessen sind.

Den Aperturradius a wählen wir aber nicht wie in Abb. 1, sondern gleich der Antennenhöhe h , so daß jetzt die „Apertur“ durch

$$r = h, \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

beschrieben wird. Die Bezeichnung „Apertur“ allerdings wegen der nahezu sphärischen Kappen unserer Antennen hier nicht mehr wörtlich genommen werden.

In den Räumen I und II möge wieder ein Feld elektrischen Typs erregt sein. \mathcal{E}_r , \mathcal{E}_θ , \mathcal{H}_φ sind dann einzigen nicht identisch verschwindenden Feldkomponenten.

Durch Vorgabe von

$$\mathcal{E}_\theta(h, \vartheta) = E_\theta$$

„Apertur“, sowie durch die Forderungen, daß die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke an der Schirmebene verschwinden soll und daß $\mathcal{E}_\vartheta(r, \vartheta)$ im Teilraum II endlich ist und für $r \rightarrow \infty$ der Strahlungsbedingung genügt, ist das elektromagnetische Strahlungsfeld im „Außenraum“ (II) eindeutig bestimmt.

Die allgemeine Felddarstellung für Kugelwellen des räumlichen Typs ist wohlbekannt (z.B. [10]). Spezialisiert die Darstellung für \mathcal{E}_ϑ bei Beachtung der Rand- und Endlichkeitsbedingungen:

$$\mathcal{E}_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{1}{kr} \sum_{n=1,3,\dots} C_n \cdot R_n(kr) \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \quad (41)$$

der Abkürzung:

$$R_n(kr) = \frac{d}{d(kr)} \left[\sqrt{\frac{1}{kr}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right]. \quad (41a)$$

Zeitabhängigkeit ist wieder $e^{+i\omega t}$; $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}$ sind die zahlreihen Hankel-Funktionen zweiter Art; $P_n(\cos \vartheta)$ bezeichnet die Legendreschen Kugelfunktionen.]

Neben (40) ist zu fordern, daß

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{kh} \sum_{n=1,3,\dots} C_n \cdot R_n(kh) \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = E_\vartheta \\ \text{für } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Nach Anwendung der Operation $\int_0^{\pi/2} \frac{dP_m}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta \dots$

beide Seiten von (42) erhält man bei Beachtung der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dP_n}{d\vartheta} \frac{dP_m}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = \frac{n(n+1)}{2n+1} \delta_{nm} \quad (43)$$

Beziehung:

$$\frac{1}{kh} R_n(kh) \frac{n(n+1)}{2n+1} = \int_0^{\pi/2} E_\vartheta \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (44)$$

Nachdem der gegebene Wert für C_n setzen wir in (41) ein und erhalten so:

$$\mathcal{E}_\vartheta = -\frac{h}{r} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{R_n(kr)}{R_n(kh)} C_n \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \quad (45)$$

der Abkürzung:

$$c_n = - \int_0^{\pi/2} E_\vartheta \frac{dP_n(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \sin \vartheta d\vartheta. \quad (45a)$$

Da die Feldkomponente E_ϑ in der „Apertur“ (39) bekannt ist, können die Strahlungsdiagramme unserer Antenne (über einer unendlichen Grundfläche) nach (45) berechnet werden.

Nun ist in jenem Winkelbereich der „Apertur“, in dem die nahezu sphärische Antennenkappe nicht stark von der Kugelfläche $r=h$ abweicht, $|E_\vartheta|$ sehr klein, so daß die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf der Antennenoberfläche verschwinden muß. Dies möge etwa für $0 \leq \vartheta \leq \Theta$ zutreffen. In der „Apertur“ können wir (nach S. 452) für hinreichend niedrige Frequenzen die Summe aller höherer Schwingungstypen gegenüber der TEM-Welle $\tilde{\mathfrak{B}}_0$

vernachlässigen. Dann folgt nach (1a) und nach (1b) in Verbindung mit (7):

$$\mathcal{E}_u = 0, \quad (46a)$$

$$\mathcal{E}_v = -\frac{e_0}{\varrho} \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{Z_A \sqrt{F_0}} \frac{d\tilde{\mathfrak{B}}_0}{du}. \quad (46b)$$

In Kugelkoordinaten ist: $\varrho = r \cdot \sin \vartheta$.

Da (46a) bei unseren Antennen in der ganzen „Apertur“ nahezu erfüllt ist, stellt E_ϑ in guter Näherung auf der ganzen Fläche (39) einfach die Projektion der hier herrschenden Feldkomponente \vec{E}_ϑ dar:

$$E_\vartheta = -\vec{E}_\vartheta \cdot \cos \gamma \quad (47)$$

mit

$$\gamma = \angle(\vec{E}_\vartheta, \vec{E}_\vartheta). \quad (47a)$$

Der Winkel γ läßt sich unmittelbar aus dem (auf graphischem Wege gewonnenen) u - v -Koordinatensystem entnehmen.

Im Winkelbereich $0 \leq \vartheta \leq \Theta$ kann $\cos \gamma$ praktisch gleich Null gesetzt werden. Oberhalb $\vartheta = \Theta$ wächst $\cos \gamma$ rasch auf 1 an.

Wenn man für unsere Antennen

$$y = \log(1 - \cos \gamma) \quad (48a)$$

über

$$x = \cos \vartheta \quad (\text{mit } \vartheta \text{ aus } \Theta < \vartheta < \pi/2) \quad (49b)$$

in rechtwinkligen Koordinaten aufträgt, findet man annähernd einen linearen Zusammenhang:

$$y = \frac{1}{\tau} (x - x_0) \quad \text{mit } \tau > 0, \tau \ll 1. \quad (50)$$

Hier hat x_0 offenbar die Bedeutung:

$$x_0 = \cos \Theta. \quad (49c)$$

Demnach dürfen wir folgenden Ansatz für $\cos \gamma$ machen:

$$\cos \gamma = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < \vartheta \leq \Theta, \\ 1 - \exp \left[-\frac{1}{\tau} (\cos \Theta - \cos \vartheta) \right] & \text{für } \Theta \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (51)$$

Durch diesen Ansatz wird die Kenntnis der Funktion $\gamma(\vartheta)$ auf die Kenntnis von nur zwei Parametern τ und Θ zurückgeführt, die sich wegen (50) leicht graphisch ermitteln lassen.

Der Winkel $\vartheta = \Theta_0$ bei dem $1 - \cos \gamma$ auf den e -ten Teil abgefallen ist, berechnet sich nach (51) aus:

$$\tau = \cos \Theta - \cos \Theta_0. \quad (52)$$

Für $\Theta < \vartheta < \Theta_0$ ist also $\cos \gamma$ schnell veränderlich.

Für die Antennen der Abb. 4 gilt: $\Theta_0 < \Theta_A$ (Θ_A bezeichnet ihren halben Öffnungswinkel.) Dann besteht also die Ungleichung:

$$\Theta < \Theta_0 < \Theta_A. \quad (53)$$

4.2.

Einen ersten Überblick über die Funktionen $\tilde{\mathfrak{B}}_0$ vermittelt die nach der WKB-Methode gewonnene Näherungslösung der homogenen Gl. (12):

$$\tilde{\mathfrak{B}}_0 \approx \frac{1}{\sqrt{k/F_0}} \exp \left\{ \pm i \int_0^u k \sqrt{F_0} du \right\}. \quad (54a)$$

Danach ist unter der Voraussetzung: $k\sqrt{F_0} \gg$ berechnet man für $n \geq 3$:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{d \log \sqrt{F_0}}{du} \right| : \quad \frac{1}{\sqrt{F_0}} \frac{d \tilde{F}_0}{du} \approx \pm i k \tilde{F}_0. \quad (54b)$$

Man erkennt nun:

a) Im Winkelbereich $\Theta < \vartheta < \Theta_0$ der „Apertur“ ändert sich bei unseren Antennen (54b) langsam im Vergleich zu $\cos \vartheta$.

b) Im Winkelbereich $\Theta_0 < \vartheta < \pi/2$ der „Apertur“, für den größtenteils $u \approx \text{const}$ ist, ändert sich (54b) praktisch gar nicht.

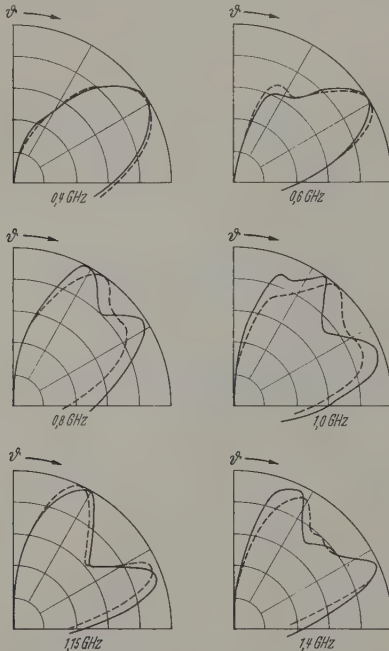


Abb. 7. Strahlungsdiagramme der Form „B“ (ausgezogen) verglichen mit den Strahlungsdiagrammen der $2\Theta_A = 50^\circ$ -Kegelanenne (gestrichelt)

Wegen a) und b) ergibt sich die Winkelabhängigkeit von E_ϑ aus (47) und (46) in guter Näherung einfach zu:

$$E_\vartheta \sim \frac{\cos \gamma}{\sin \vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta} - \frac{1 - \cos \gamma}{\sin \vartheta}. \quad (55)$$

Wegen (45a) und (51) hat man dann:

$$c_n = P_n(\cos \Theta) - \varepsilon_n \quad (56)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_n &= \int_{\pi/2}^{\Theta} (1 - \cos \gamma) \frac{dP_n}{d\vartheta} d\vartheta \\ &= e^{-\frac{1}{\tau} \cos \Theta} \int_{\pi/2}^{\Theta} e^{\frac{1}{\tau} \cos \vartheta} \frac{dP_n}{d\vartheta} d\vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (56a)$$

Im Falle der einfachen Kegelantenne vom Öffnungswinkel 2Θ wäre natürlich $\varepsilon_n = 0$ für $n = 1, 3, 5, \dots$, da dann ja $\cos \gamma \equiv 1$ für $\Theta < \vartheta < \pi/2$ ist.

Wegen

$$\frac{dP_n}{d\vartheta} = \frac{dP_{n-2}}{d\vartheta} - (2n-1) P_{n-1} \cdot \sin \vartheta \quad [11] \quad (57)$$

$$\int_{\pi/2}^{\Theta} e^{\frac{1}{\tau} \cos \vartheta} \frac{dP_n}{d\vartheta} d\vartheta = A + B$$

mit

$$A = \int_{\pi/2}^{\Theta} e^{\frac{1}{\tau} \cos \vartheta} \frac{dP_{n-2}}{d\vartheta} d\vartheta,$$

$$\begin{aligned} B &= -(2n-1) \int_{\pi/2}^{\Theta} e^{\frac{1}{\tau} \cos \vartheta} \cdot P_{n-1} \sin \vartheta d\vartheta \\ &= (2n-1) \tau \left[e^{\frac{1}{\tau} \cos \Theta} P_{n-1}(\cos \Theta) - P_{n-1}(0) \right] \\ &\quad - (2n-1) \tau \int_{\pi/2}^{\Theta} e^{\frac{1}{\tau} \cos \vartheta} \frac{dP_{n-1}}{d\vartheta} d\vartheta. \end{aligned}$$

Multipliziert man (58) mit $e^{-\frac{1}{\tau} \cos \Theta}$ und berücksichtigt anschließend, daß $e^{-\frac{1}{\tau} \cos \Theta} \ll 1$, so erhält man die Rekursionsformel:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-2} + \tau(2n-1) P_{n-1}(\cos \Theta) - \tau(2n-1) \varepsilon_{n-1}.$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch den Ansatz

$$\varepsilon_n = - \sum_{j=1}^n \frac{d^j(P_n(\cos \Theta))}{(d \cos \vartheta)^j} (-\tau)^j.$$

Unter Benutzung der Abkürzung (49b) berechnet man nämlich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= - \sum_{j=1}^n \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} \left(\frac{dP_n}{dx} \right) (-\tau)^j \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} \left[\frac{dP_{n-2}}{dx} + (2n-1) P_{n-1} \right] (-\tau)^j \\ &= - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{d^j P_{n-2}}{dx^j} (-\tau)^j + \\ &\quad + \tau(2n-1) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{d^j P_{n-1}}{dx^j} (-\tau)^j. \end{aligned}$$

und daraus folgt unmittelbar (59).

Man überzeugt sich leicht, daß der Ansatz auch für $n=1$ richtig ist. Demnach gilt (60) für interessierenden Indices $n=1, 3, 5, \dots$.

Gl. (56) in Verbindung mit (60) und (52) stellt den Anfang einer Taylor-Entwicklung der Funktion $P_n(\cos \Theta_0)$ nach Potenzen von $\cos \Theta_0 - \cos \Theta$ dar. Dabei werden so viele Glieder mitgenommen, wie der Grad von P_n angibt.

Bei Antennen, für die der Ansatz (51) und die Beziehung (55) ausreichend erfüllt sind, gilt also in guter Näherung:

$$c_n = P_n(\cos \Theta_0).$$

Darum ist zu erwarten, daß die Strahlungsdiagramme einer Antenne aus Abb. 4 mit denen der Kegelantenne des durch (52) gegebenen Öffnungswinkels $2\Theta_0$ übereinstimmen werden.

Abb. 7 zeigt die gute Übereinstimmung der Strahlungsdiagramme der Form „B“ ($\Theta_A = 35^\circ$) mit denen der gleich hohen Kegelantenne des halben Öffnungswinkels $\Theta_0 = 25^\circ$. (Die Charakteristiken wurden an einem endlichen Grundblech gemessen.)

CEJ

Multimi**Multipelinterferenzmikroskop**

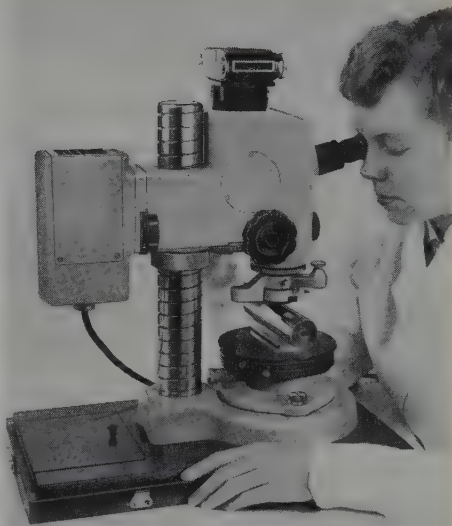
industrielle und wissen-
schaftliche Zwecke in neuer
Ausführung.

neue Modell

3000 C

mit u. a. folgende Neu-
heiten:

- Die Vergrößerung ist bedeutend erhöht worden von 140 auf 325
- Die Umschaltung der verschiedenen Vergrößerungen, 50, 130, 325, erfolgt schnell und einfach durch einen Vergrößerungswechsel.
- Das Gerät kann für Multipel-Interferenzen und für Zweistrahlinterferenzen verwendet werden.
- Eingebaute Kamera ist in der Standardausführung einbegriffen.
- Drei verschiedene Beleuchtungen können verwendet werden: Mischlicht von der Quecksilberlampe, die grüne Hg-Linie 5461, die violette Hg-Linie 4358.

**C. E. JOHANSSON & CO. G. m. b. H.****Berlin W 15**

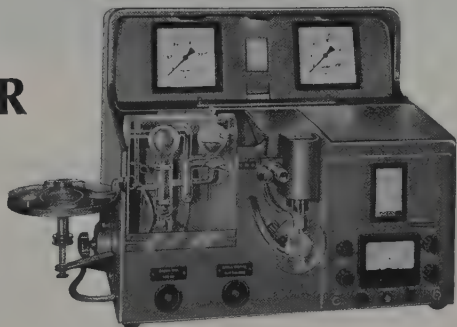
Pfalzburger Str. 87

Fernruf 913066

Anwendungsbeispiele:

Oberflächenprüfung, direkt 0,005—1 μ
Oberflächenprüfung, Abdruck und Immersion
Maximum etwa 25 μ

Messung von Form, Oberflächentextur,
Schritten in Flächen, Dicken von Belägen,
Schnitzen usw. (hochreflektierenden Flächen)
0,0005 bis etwa 2 μ

PEKTROMETER**Flammenphotometer**

(Reproduzierbarkeit $\pm 0,5\%$ vom Wert)
und als

Absolutkolorimeter

(Reproduzierbarkeit $\pm 0,2\%$ vom Wert)

Verlauf-Linien-Interferenzfilter

von 380 nm (violett) bis 760 nm (Fernes
Rot) kontinuierlich mit einer Halbwerts-
breite von 10 nm einzustellen

NETZSCH

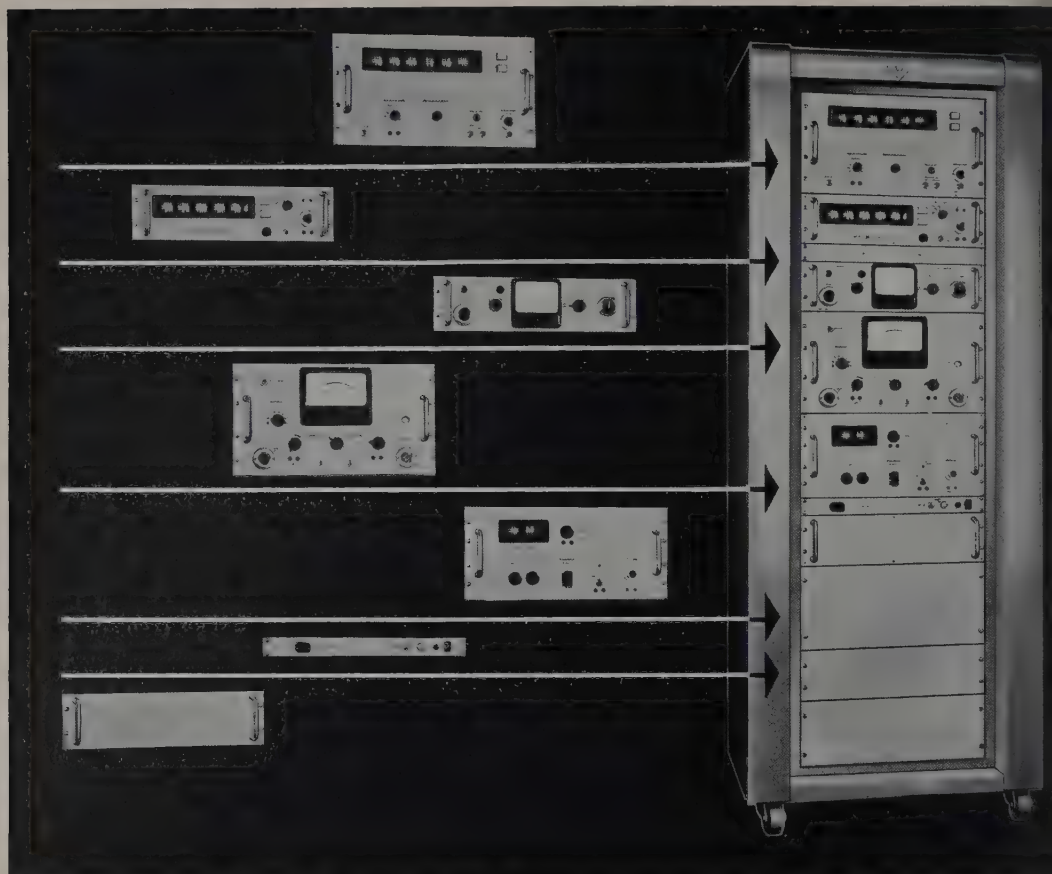
SELB / B A Y E R N

ABT. PRÜFGERÄTE

Fernschreiber Nr. 0643/535

Telefon Vorwählzahl 09287 Nr. 2751/52/53





Zur Interkama '60: Das neue FH-Kombinationsprogramm (19'')

Wir zeigen in Halle E, Stand 5013 **Sektor I** Technische Anwendung von Radio-Nucliden: Flächengewichts-Dickenmeßanlagen für den gesamten Produktionsbereich flächenförmiger Materialien, einschließlich Vorrichtungen maschinelle Regelung; Dichtemeßanlagen **Sektor II** Anwendung von Radio-Nucliden in der Chemie: Strahlungsmeßplätze für radioaktive Strahlung mit vollautomatischen Probenwechslern und Daten-Registrierung; spezielle Meßplätze für Radiochromatographie; Anlagen zur Messung energiearmer Beta-Aktivitäten in der Gasphase; Geräte für radiometrische Absorptions-Analyse. **Sektor III** Anwendung von Radio-Nucliden in der Medizin: Photo-Szintigraph (Szinti-Scanner) **Sektor IV** Kernphysik: Ein- und Vielkanal-Impulshöhen-Analysatoren, Koinzidenz-Antikoinzidenz-Verstärker; Level-Anlage; **Sektor V** Strahlenschutz: Mehrkanal-Überwachungssysteme für Kontroll- und Arbeitsbereiche, Hand-Fuß-Monitore; Strahlenschutz-Meßgeräte für Individual-Dosimetrie.

Frieseke & Hoepfner GmbH

ERLANGEN-BRUCK

man muß für den halben Öffnungswinkel Θ_0 der Blick auf ihre Strahlungsdiagramme optimalen Antenne etwa $20^\circ < \Theta_0 < 30^\circ$ gelten, denn für den Winkelbereich fallen die Koeffizienten $c_n = \cos \Theta_0$ mit wachsendem Index n am stärksten ab, daß hier die höheren Entwicklungsglieder von (45), die sie im betrachteten Frequenzbereich bedeutsam voll werden könnten, besonders stark unterdrückt werden.

Demnach muß von den Antennen der Abb. 4 in die Form „B“ die besten Strahlungseigenschaften besitzen. Zu größeren Öffnungswinkeln hin muß die Frequenzabhängigkeit der Strahlungsdiagramme unserer Antennen zunehmen, wie dies ja bei den entsprechenden Kegelantennen der Fall [8], [12]). So sind die Charakteristiken der Form (in dem der Abb. 7 zugrunde gelegten Frequenz) bedeutend frequenzabhängiger als die der Form „B“, und zwar entsprechen die Strahlungsdiagramme der Form „E“ ($\Theta_A = 55^\circ$) in etwa denen des Kegels vom halben Öffnungswinkel $\Theta_0 = 45^\circ$.

Zusammenfassung

In dieser Veröffentlichung wird das Problem der optimalen Rundstrahlerkontur mit hoher Genauigkeit gelöst.

Im ersten Kapitel wird die strenge Behandlung des Wertproblems der rotationssymmetrischen Antenne durch eine Störungsrechnung ersetzt; und es wird eine einfache Näherungsformel für die Änderung der Reflexionskoeffizienten am Antenneneingang in einer Formvariation hergeleitet. Ausgehend von dieser Formel wird im zweiten Kapitel ein Verfahren zur Ermittlung von widerstandsmäßig optimalen Rundstrahlern (mit vorgeschriebenem Wellenwiderstand) entwickelt. Im dritten Kapitel wird dann eine widerstandsmäßig optimaler Rundstrahler aufgestellt und besprochen. Vor allem wird ihr Widerstandsverhalten mit dem von Kegelantennen gleicher

Öffnungswinkel verglichen. Im letzten Kapitel wird gezeigt, daß die Richtdiagramme jeder Antenne dieser Schar in erster Näherung mit denen einer Kegelantenne etwas kleineren Öffnungswinkels übereinstimmen.

Während das maximale Stehwellenverhältnis oberhalb einer zweckmäßig gewählten Grenzfrequenz bei der genannten Antennenschar mit wachsendem Wellenwiderstand monoton zunimmt, nimmt gleichzeitig die Frequenzabhängigkeit der Strahlungsdiagramme ab. Die Form „C“ (Wellenwiderstand: 60Ω) mit einem maximalen Stehwellenverhältnis $\approx 1,08$ (bei vollwandiger Ausführung) oberhalb $\lambda/\lambda_0 = 0,35$ kann im Blick auf alle drei Forderungen von S. 450 als „breitbandigste“ Antenne der in Abb. 4 dargestellten Schar angesehen werden.

Ich möchte an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. HANS WOLTER, für die Überlassung des Themas und die Förderung der Arbeit meinen aufrichtigen Dank sagen.

Literatur: [1] ZUHRT, H.: Elektromagnetische Strahlungsfelder. Berlin 1953. — [2] Handbuch der Physik, herausgeg. von S. FLÜGGE, Bd. XVI. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958. — [3] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI. Wiesbaden: Dieterichsche Verlagsbuchhandlung 1947. — [4] MEINKE, H.: Nachrichtentechn. Z. 10, 594 (1957). — [5] BORGIS, F.E., u. C.H. PAPAS: Randwertprobleme der Mikrowellenphysik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955. — [6] MEINKE-GUNDLACH: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956. — [7] KING, R.: J. Appl. Phys. 26, 317 (1955). — [8] WAHSEILER, H.G.: Diplomarbeit, Inst. f. angew. Physik d. Universität Marburg 1959. — [9] WOLTER, H.: Z. angew. Phys. 4, 60 (1952). — [10] MADELUNG, E.: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957. — [11] JAHNE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen. Leipzig: Teubner 1948. — [12] BROWN, G.H., and O.M. WOODWARD jr.: R.C.A.-Review 13, 425 (1952).

Dipl.-Phys. HANS GEORG WAHSEILER,
Institut für angewandte Physik
der Universität Marburg a.d. Lahn

Über den Einfluß des Entladungsgases auf den zeitlichen Verlauf des Stromes, der Spannung und der Spektrallinienintensität bei Funkenentladungen *

Von RUDOLF EICHINGER und HANS KREML

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 24. Mai 1960)

I. Einleitung und Problemstellung

SCHEIBE und SCHÖNTAG [11] haben bereits 1934 festgestellt, daß das Intensitätsverhältnis der Linien $2516 \text{ \AA}/\text{Fe II } 2518 \text{ \AA}$ beim elektrischen Funken in Abhängigkeit vom Entladungsgas verschiedene Werte annimmt. Diese für die Spektroskopie sehr wichtige Erscheinung wurde in der Folgezeit von mehreren Forschern hauptsächlich am Bogen weiter untersucht [1], [13], [14]. Nach diesen Arbeiten scheint die Intensitätserhöhung der leichtflüchtigen Elemente in Argon gegenüber Luft als gesichert. (Dem Argon kommt wegen seiner Verwendung als chemisch in-

aktives Schutzgas besondere Bedeutung zu.) Im allgemeinen lassen sich aber die Ergebnisse der verschiedenen Arbeiten wegen der unterschiedlichen Versuchsparameter nicht auf einen gemeinsamen Nenner bringen, ja, sie widersprechen sich mitunter sogar. So beobachtete VALLEE [12] beim Gleichstrombogen eine Vergrößerung des Signal-Rausch-Verhältnisses in Argon und Helium gegenüber Luft, was einer Verbesserung der Nachweispfindlichkeit gleichkommt, während STONE [14] beim Abreißbogen zeigt, daß der Gebrauch von Edelgasatmosphären — außer in Ausnahmefällen — nicht zu einer Verbesserung der spektroskopischen Nachweispfindlichkeit führt.

Über den Einfluß des Entladungsgases beim Funken wurden von S. BESZEDES am hiesigen Institut zwei

* Auszug aus der Dissertation R. EICHINGER, Physikalisch-Chemisches Institut TH München 1960.

Arbeiten durchgeführt [15], [16]. Zur Beobachtung wurden hauptsächlich Cu-, Si-, Zn- und Cd-Linien herangezogen. In allen Fällen ergab sich eine Erhöhung der Intensität in Argon gegenüber Luft und Stickstoff. In [15] wurde ein Resonanzfunkenerzeuger verwendet, bei welchem bekanntlich Rückwirkungen zwischen Funkenstrecke und Ladekreis auftreten. Die Ergebnisse dieser Arbeit können also nicht ohne weiteres auf die jetzt allgemein übliche Anregung mit gesteuerten Funkenerzeugern übertragen werden.

Eine bemerkenswerte Arbeit von BAKER, ADELSTEIN und VALLEE [17] befaßt sich mit der selektiven Intensitätserhöhung von Metallionenlinien in Argon und Krypton beim Gleichstrombogen. Die Verfasser finden eine Abhängigkeit des Verhältnisses Intensität in Argon zu Intensität in Helium vom Gesamtanregungspotential (Ionisierungs- + Anregungspotential) derart, daß bei etwa 12 V ein Maximum des

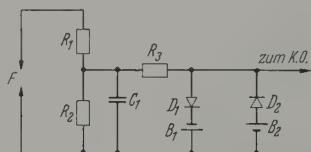


Abb. 1. Begrenzungsschaltung zur Messung des Spannungsverlaufes an der Funkenstrecke. $R_1 = 115 \text{ k}$, $R_2 = 1,4 \text{ k}$, $R_3 = 5 \text{ k}$; $D_1, D_2 = \text{Si-Dioden OY 253}$; $C_1 = 30 \text{ pF}$; $B_1, B_2 = \text{Batterien } (1,5 \text{ V})$

Intensitätsverhältnisses auftritt. Der Effekt wird durch ein Resonanzphänomen zwischen den untersten metastabilen Argonniveaus einerseits und den neutralen Metallatomen andererseits erklärt.

Außer in der zuletzt genannten Arbeit gehen die Verfasser der genannten Arbeiten nicht auf die physikalischen Vorgänge im Entladungsplasma ein. Von der Plasmaphysik her ist bekannt, daß die Temperatur und die Feldstärke (Brennspannung) im wesentlichen von der elektrischen Leitfähigkeit (Ionisierungsspannung) und der Wärmeleitfähigkeit des Entladungsgases abhängen. So kann man voraussetzen, daß Temperatur und Feldstärke mit der Ionisierungsspannung und auch mit der Kühlung des Bogens, z.B. durch große Wärmeleitfähigkeit des Entladungsgases steigt. Die von C. SURTS [18] gemessenen Bogencharakteristiken bestätigen diese Regel. Bei konstanter Stromstärke nimmt nach SURTS die Feldstärke in der Reihenfolge Argon—Luft—Helium zu (in Analogie zu Abschnitt 4).

Bei der Beurteilung des Einflusses der Ionisierungsspannung muß beachtet werden, daß die zu untersuchende Entladung im allgemeinen nicht als Gasbogen angesehen werden kann, sondern daß stets eine gewisse Menge Elektrodendampf in den Entladungsraum gelangt und die Entladung mehr (z.B. Hg-Bogen) oder weniger (Bögen mit hochschmelzenden Elektroden) als Dampfbogen anzusprechen ist.

Der Anteil der Elektroden an der Erzeugung von Ladungsträgern ist einerseits abhängig von der Menge des verdampften Elektrodenmaterials (Verdampfungswärme) und andererseits von dessen Ionisierungsspannung. Während eine größere Elektrodendampfdichte im Entladungsraum einen größeren Anteil des Elektrodendampfes an der Erzeugung von Ladungsträgern zur Folge hat, ist dieser Anteil um so kleiner, je niedriger die Ionisierungsspannung des Entladungs-

gases und je höher jene des Elektrodenmaterials (Berechnung für kleinen Elektrodendampfdruck bei SPÄTH-KREMPL [31]).

Die vorliegende Arbeit soll zur Klärung spektroskopischen Erscheinungen beim Wechsel des Entladungsgases beitragen. Insbesondere sollen die auf eine möglichst geringe Anzahl von Parametern zurückgeführt werden.

II. Meßanordnung

21. Optik

Zur spektralen Zerlegung des Lichtes wurde ein Doppelmonochromator (MM 12) verwendet. Die Ausleuchtung wurde mit einer Köhlerschen Abbildung vorgenommen. Brennweiten der Linsen wurden so gewählt, daß ein wandern des Funkenbildes aus dem Kollimatorspiegel Sicherheit verhindert wurde. Als Lichtempfänger wurde ein vollkommener abgeschirmter Sekundärelektronenvervielfacher (RCA 1 P 21) eingebaut, auf dessen Kathode der Austrittsstrahl des Monochromators abgebildet wurde. Durch diese zusätzliche Abbildung werden Intensitätsschwankungen infolge „Zerfallens“ des Funkens und nachfolgender Wanderung des Austrittsstrahles auf der Photokathode mit unvermeidlicher Linsencharakteristik vermieden. Nach einem Vorschlag von E. PREUSS brachte die Verwendung von Rasterlinsen bei einer neueren Anordnung, wie bei ähnlichen Problemen [42], [43], [45] eine weitere Verbesserung.

22. Elektronik

Die Versorgungsspannung für den SEV wurde aus dem Hochspannungskonstanthalter entnommen, und die Arbeitswiderstand abfallende Signalspannung einem Kathodenstrahloszillographen (Tektronix, Typ 545) zugeführt. Kathodenstrahloszillograph hat ein Auflösungsvermögen von 10^{-7} sec und eine Eingangskapazität von 20 pF . Bei einem Arbeitswiderstand von $5 \text{ k}\Omega$ wird das volle Auflösungsvermögen erreicht ($R \cdot C = 10^{-7}$).

Als Funkenerzeuger diente ein Mittelspannungsfunkenerzeuger der Firma RSV (Typ FES 70/GTT 4*).

Die Funkenparameter waren: $U = 1000 \text{ V}$; $C = 20 \text{ pF}$; $L = 20 \text{ }\mu\text{H}$; $R = \text{Restwiderstand}$.

23. Aufzeichnung der Meßgröße

Zur Registrierung der Meßgröße wurde eine Agfa-Kamera (Öffnung 1:3,5) und ein Perutz-Röntgenschirmbild (21/10 DIN, $\gamma = 1,9$) verwendet. Bei allen benutzten Aufnahmen wurde der Kathodenstrahl mit einer Geschwindigkeit von 10^6 Hz auf dem Film registriert.

24. Messung des Spannungsverlaufes an der Funkenstrecke

Zur Vermeidung von Spannungsüberlastungen des Kathodenstrahloszillographen wurde die in Abb. 1 angegebene Begrenzungsschaltung gewählt.

Der Spannungsteiler $R_1 - R_2$ unterteilt die Spannung an den Elektroden im Verhältnis 1:82. Der Kondensator überbrückt den Meßwiderstand R_3 für die hohen Frequenzen des Zündimpulses (Zeitkonstante: $0,4 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$). Die Spannung wird über einen Schutzwiderstand R_4 den Dioden D_1 und D_2 zugeführt. Diese sind durch B_1 und B_2 (= $1,5 \text{ V}$) so vorgespannt, daß bei Spannungen von $\pm 2 \text{ V}$ der Einfluß des Kathodenstrahloszillographen kurzgeschlossen wird. Prüfung der Schaltung wurde mit 10^6 Hz -Wechselstrom vorgenommen [38].

25. Messung des Stromverlaufes

Zur Strommessung wurde ein von H. PARK [19] entwickelter Koaxialwiderstand in den Entladekreis des Funkenerzeugers eingebaut und die an ihm abfallende Spannung Kathodenstrahloszillographen zugeführt¹. Der Meßfehler nach PARK bis hinauf zu 70 MHz kleiner als 10% .

* Seefeld-Hechendorf (Obb.).

¹ Der Koaxialwiderstand wurde freundlicherweise Herrn Dr. W. KESSLER zur Verfügung gestellt.

26. Gasversorgung

ur Einstellung der gewünschten Gasatmosphäre wurde eigens für diesen Zweck konstruierte Funkenkammer verest [38]¹. Als Elektrodenmaterial dienten Spekttralkohlen (Ringsdorff), spektralreines Aluminium und Blei, rodenabstand 3 mm. Beim Gaswechsel wurde die ennkammer zunächst bis auf etwa 0,1 Torr evakuiert, ließend mit dem neuen Gas gespült, wiederum evakuiert schließlich der gewünschte Gasdruck (700 Torr) einlt (Abb. 2). Damit wurde erreicht, daß der Fremdgasdruck 5 Torr betrug. Als Entladungsgase wurden benützt: Stickstoff (technischer), Argon (99,95%) und Helium %).

III. Beobachtungen

31. Strom- und Spannungsverlauf

Das *Strom-Zeit-Diagramm* (berechnet bei KAISER ist in Abb. 3 wiedergegeben. Eine Abhängigkeit Entladungsgas konnte nicht festgestellt werden; bei Helium ist die Streuung etwas größer. Deutlich anbar sind die stromfreien Phasen zwischen dem Löschen und dem Wiederspülen. Das *Spannung-Zeit-Diagramm* dagegen eine deutliche Abhängigkeit Entladungsgas (Abb. 4).

Die *Spannung* fällt in der ersten Brennnde von der Kondensatorspannung $U_G = 150$ V (es wird erst von der Begrenzungsung $U_G \approx 150$ V an registriert) aperiio- (vgl. [33]) bis zur Löschspannung $U_L \approx 10$ V. Die nächste und alle folgenden Brennbeginnen mit einer Zündspitze, die Brennperiode zu Brennperiode zunimmt. Wiederspülspannungen U_Z sind gasabig und nehmen im Mittel in der ReihenArgon—Luft—Helium zu. Bei der fünfBrennperiode ist in Luft und Helium U_Z so groß, daß es über U_G und bei einigen hschlagen sogar über der derzeitigen ensatorspannung liegt. Die Entladung t dann bereits mit der vierten Halbwelle. Gegensatz dazu ist in Argon bei einem en Teil der insgesamt etwa 125 Durchge pro Aufnahme noch eine sechste nperiode zu beobachten (Abb. 4). Beim Vergleich von Luft gegen Argon noch festzustellen, daß die Brennspannung U_B (gemittelt, die erste Halbwelle t dabei unberücksichtigt) in Luft höher als in Argon.

Meßwerte:

Argon	$U_B = 42$ V,	Halbwellen etwa 6
Luft	$= 50$ V,	etwa 5
Helium	≈ 50 V,	etwa 4.

32. Linienintensitätsverlauf (Abb. 5)

n Argon zeigt der Intensitätsverlauf aller Atomvier Maxima, wobei die Intensität erst nach dem en Maximum wieder auf Null zurückgeht. Neben Atomlinien gehen auch die Ionenlinien Al II Å und Pb II 2203 Å zwischen den beiden ersten mas nicht auf Null zurück, während die Linie C III Å als einzige nur ein Intensitätsmaximum zeigt. n Luft zeigt die Linie C I 2478 Å gemäß dem nverlauf (Abb. 3) drei Intensitätsmaxima. Bei

Für die Durchkonstruktion und Anfertigung danken wir P. SEIDL.

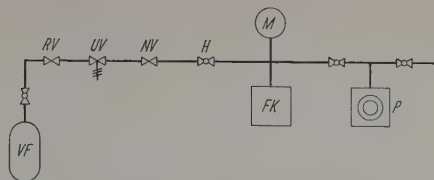


Abb. 2. Gasversorgungssystem. VF Gasvorratsflasche, RV Reduzier-ventil, NV Nadelventil, M Hahn, M Manometer, FK Funkenkammer, P Rotationspumpe (zweistufig)

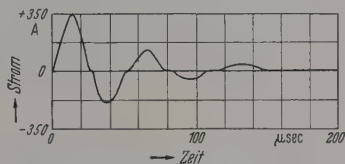


Abb. 3. Verlauf der Stromstärke mit der Zeit, $p = 700$ Torr, bei Argon, Stickstoff, Luft und Helium

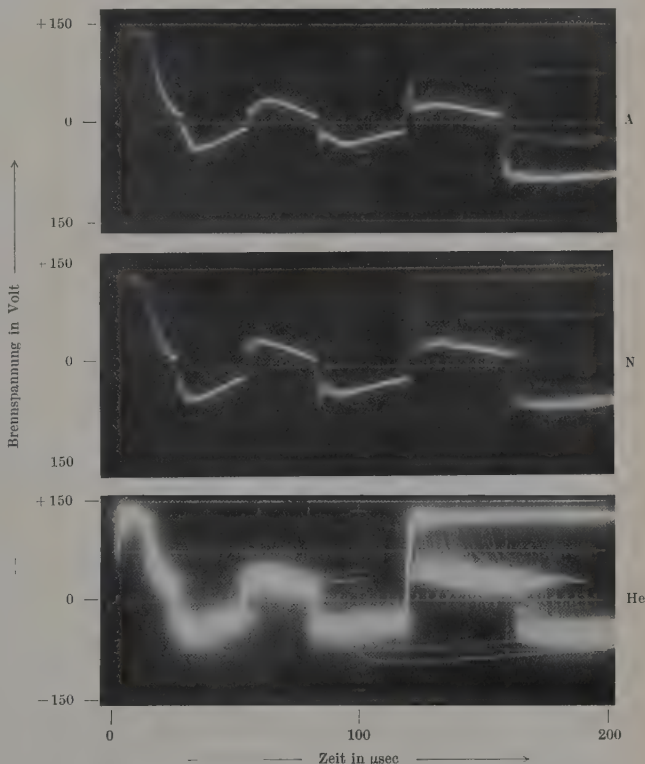


Abb. 4. Verlauf der Brennspannung mit der Zeit

der vierten und fünften Stromhalbwelle wird die Linie nicht mehr angeregt. Dagegen zeigen die Linien C II 2512 Å und C III 2297 Å nur noch zwei Intensitätsmaxima, wobei das zweite Maximum der Linie des zweifachionisierten Atoms nur noch etwa halb so groß ist wie das des einfachionisierten (Abb. 6). Das erste Intensitätsmaximum wurde durch Änderung der Verstärkung jeweils auf Vollauschlag des Kathodenstrahloszillographen normiert. Mit zunehmendem Ionisationsgrad werden die Zeiten der Lichtausstrahlung kleiner, ein strahlungsfreies Intervall zwischen erstem und zweitem Maximum tritt auf und das erste Maximum verschiebt sich nach kürzeren Zeiten. Die

Verschiebung beträgt bei der Linie C II 2512 Å etwa 4 μsec , bei der Linie C III 2297 Å eine weitere Mikrosekunde mehr.

Die beobachteten Aluminium- und Bleilinen zeigen grundsätzlich die gleichen Erscheinungen mit dem zusätzlichen Effekt, daß die Atomlinien mindestens zwischen den beiden ersten Intensitätsmaximas nicht auf die Intensität Null zurückgehen. Der Intensitätsverlauf der Spektrallinien in Stickstoff zeigte gegenüber dem in Luft keinen meßbaren Unterschied.

In Helium hebt sich das erste Intensitätsminimum der Linien Al I 3961 Å und Pb I 2170 Å wiederum von der Nulllinie ab, aber noch weniger als bei Luft bzw. Stickstoff, während die ersten Minimas der Linien

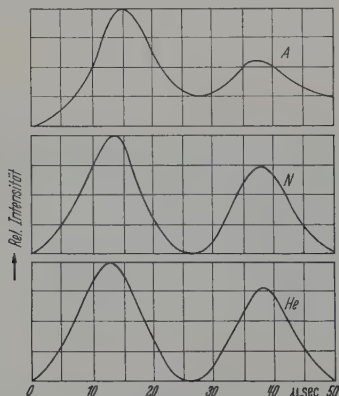


Abb. 5. Intensitätsverlauf der Spektrallinie Pb II 2203 Å bei verschiedenen Entladungsgasen

Al II 2816 Å und Pb II 2203 Å im Gegensatz zu den Aufnahmen in Argon auf der Nulllinie liegen. Im ganzen gesehen gleichen die Aufnahmen mehr denen in Luft und Stickstoff. Die in Abb. 5 und 6 gezeigten Beobachtungen werden durch die Tabelle ergänzt. Dabei wurden die beobachteten Spektrallinien nach einem früheren Vorschlag [31] nach der Normtemperatur [30], die Entladungsgase nach ihrer Wärmeleitfähigkeit geordnet.

IV. Theorie mit Anwendung auf die Beobachtungen

41. Thermodynamisches Gleichgewicht

Um die Gleichungen der Thermodynamik, insbesondere die Boltzmann-Formel und die Saha-Gleichung auf das Plasma anwenden zu können, ist es erforderlich, daß alle wesentlichen Vorgänge (Elementarprozesse) annähernd ebenso häufig stattfinden wie ihre Umkehrvorgänge. Dies ist bei Normdruck in allen stationären Bögen der Fall. Es finden fast genau so viele Anregungs- und Ionisationsstöße wie Stöße zweiter Art und Rekombinationen im Dreierstoß statt. Das gleiche gilt für die Energieübertragung beim elastischen Stoß zwischen Elektronen, Ionen und Atomen. Nach WEIZEL und ROMPE [5] fluktuiert beim Bogen etwa 10^4 bis 10^6 mal mehr Leistung zwischen den einzelnen Teilchen als nach außen abgegeben wird.

Beim elektrischen Funken muß die Frage des Temperaturgleichgewichtes von Fall zu Fall geprüft werden. WEIZEL und ROMPE [5] haben die Einstellzeiten der einzelnen Gleichgewichte abgeschätzt. Dabei kommt nur die Zeit für die Energieübertragung

Elektronen \leftrightarrow Atome [$\sim 10 \mu\text{sec}$] in die Größenordnung der hier verwendeten Schwingungsdauer des Funkenstromes.

Durch neuere Messungen der Elektronen- und temperatur durch MANDELSTAM [20] und durch frühere Arbeit [31] wurde gezeigt, daß die Einstellzeit für das Gleichgewicht zwischen Elektronen und Atomen nur etwa 10^{-7} bzw. $\leq 10^{-6}$ sec beträgt. Sie kann hier mit einem Stromanstieg von $\tau/4 = 1$ thermisches Gleichgewicht angenommen werden, solchen Funken können wir deshalb von einer einheitlichen Temperatur sprechen: Gastemperatur T_g Elektronentemperatur T_e .

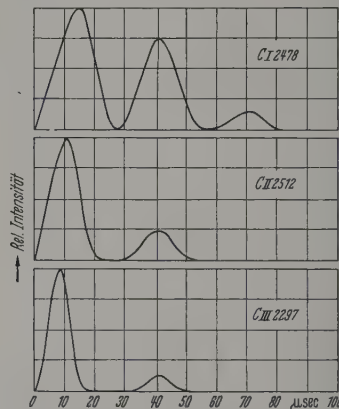


Abb. 6. Intensitätsverlauf der Kohlenstofflinien C I 2478 Å, C II 2512 Å und C III 2297 Å in Luft als Entladungsgas (erstes Maximum normiert)

42. Temperaturbestimmungen

Bestimmungen der Elektronen- und Gastemperatur liegen in großer Anzahl vor. Die Elektronentemperatur wird meist als Anregungstemperatur der folgenden Gleichung gewonnen

$$I_n^m = c n A_n^m \frac{g_m}{g_0} e^{-U_{am}/kT} \cdot h\nu$$

c = Spektrographenfaktor,

n = Anzahl der Emissionsträger,

A_n^m = Übergangswahrscheinlichkeit vom m -ten in den n -ten Quantenzustand,

g_m, g_0 = Statistisches Gewicht des m -ten bzw. Grundzustandes bzw. Zustandssummen, wenn $U_{am} \leq 1 \text{ eV}$,

U_{am} = Anregungsenergie des m -ten Zustandes.

Die Gastemperatur T_g ergibt sich aus der Dichte bei konstantem Druck mit den idealen Gasgesetzen. Sie kann dabei aus der Schallgeschwindigkeit [26], aus der Absorption von α - oder Röntgenstrahlen oder aus der Strahlungsintensität reiner aktiver Isotope gewonnen werden [27]. T_g kann auch direkt aus der Intensitätsverteilung in Rotationsbanden [28], [29] oder aus der Doppler-Breite geeigneter Spektrallinien ermittelt werden.

Bei rotationssymmetrischen Bögen hat sich von LARENZ [30] entwickelte Methode der Temperaturbestimmung bewährt, die auf Gl. (1) zurückgeht und die in der Arbeit SPÄTH-KREMPL [31] auf zeitveränderliche Plasmen angewendet wurde.

$I(T)$ hat beim Durchschreiten einer genügend großen Temperaturskala bei einer bestimmten Temperatur \tilde{T} immer ein Maximum, denn die bei kleinen Temperaturwerten schnell ansteigende e -Funk-

Tabelle

	[Å]	U_j [eV]	U_a [eV]	\tilde{T} (°K)	$\tilde{\tau}_A$	$\tilde{\tau}_L$	$\tilde{\tau}_{He}$	Δ_A	Δ_L	Δ_{He}	H_A	H_L	H_{He}
	2297	47,86	5,4	32000	10	8	10	8	4	8	0	0	0
	2562	31,9	23,6	28500	10	9	10	8	9	8	0	0	0
	2512	24,38	18,66	27000	10—11	10	11	9	10	9	0	0	0
	3601	28,44	17,81	25000	12	12	13	8	10	9	0	0	0
	2816	18,82	11,82	17700	17	13	13	8	10	10	20	0	0
	2203	15,03	7,25	15800	15	14	13	12	13	12	33	0	0
	2478	11,26	7,69	12800	17	15	14	16	13	15	45	5	5
	2170	7,41	5,67	8500	19	16	16	15	13	13	58	10	10
	3961	5,98	3,14	7900	25—45	16	17	20	15	15	58	15	15

$\tilde{\tau}$ = Zeit des ersten Intensitätsmaximums (μ sec); Δ = Halbwertsbreite der ersten Intensitätshalbwelle (μ sec); H = Höhe des ersten Intensitätsminimums in % des 1. Maximums; \tilde{T} = Normtemperatur.

rt sich bei hohen Temperaturen dem Wert 1, und die Zahl der Emissionsträger n nach den all- inen Gesetzen zuerst mit $1/T$ abnimmt, bei en Temperaturen aber durch die Ionisation all gegen Null geht. Bestimmt man nun den Ort, $\tilde{\tau}$ auftritt (LARENZ) oder die Zeit $\tilde{\tau}$, bei welcher das Plasma auf \tilde{T} abgekühlt hat (SPAETH- MPL), so hat man einen Temperaturmeßpunkt für Abstand bzw. für die Zeit. Messungen mit Linien verschiedenem \tilde{T} vervollständigen die Temperatur-

ür die Temperatur \tilde{T} , bei der eine Linie eines ers $n(T) = f(U_j)$ und der Besetzungszahl $- U_a/kT$) in der Temperaturskala ein Maximum tzt, fand LARENZ [30] eine transzendente Gleichung r \tilde{T} implizit enthalten ist und stellte die Lösung isch dar. \tilde{T} läßt sich mit einem Fehler von nur ren Prozenten explizit in folgender Form dar- n [KREMPL, unveröffentlicht].

$$\left. \begin{aligned} &0,89 U_j \\ &1 - 0,31 \alpha + 0,34 \log \frac{U_j}{10} - 0,14 \log \left(\frac{g_i}{g_i + 1} \cdot P \right) \times \\ &\quad \times 10^3 [^\circ \text{K}]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

i bedeutet $\alpha = U_a/U_j \leq 1$ die relative, auf die Ioni- gungsspannung bezogene Anregungsspannung; U_a U_j in [V], P in [atm], g_i = statistisches Gewicht des dzustandes des Trägers der Emission, g_{i+1} = das rechende der nächst höheren Ionisationsstufe. Diese Form der Darstellung eignet sich besser zur ussion und läßt die wesentlichen Abhängigkeiten t erkennen.

\tilde{T} ist proportional der Ionisierungsspannung, Glied $0,34 \log \frac{U_j}{10}$ ändert sich demgegenüber nur g.

Die relative Anregungsspannung α ist an \tilde{T} mit etwa 31% gegenüber U_j beteiligt.

Der Druck P unter dem Logarithmus hat geringen Einfluß (etwa 15% bei Änderung von P eine Zehnerpotenz).

ie Voraussetzung für eine eindeutige Zuordnung beobachteten Maximums zur Zeit $\tilde{\tau}$ zu einer eratur \tilde{T} ist, daß die Temperatur monoton ab- Maxima, die infolge von Strommaxima entstehen aktionsmaxima), sind ungeeignet [31]. Sie sind allem daran zu erkennen, daß die Intensitäts- ma zeitlich mit den Strommaxima zusammen- (2. und 3. Maximum in Abb. 6). Das erste mum, das diese Bedingung sicher erfüllt, ist das

der Linie C II 2512 Å bei $\tilde{\tau} = 11 \mu$ sec. Frühere Maxi- ma z.B. C III 2297 Å bei $\approx 9 \mu$ sec sind für eine Zu- ordnung unsicher, da sie durch das zeitlich erste Temperaturmaximum ($T_g = T_e$) des Plasmas entstanden sein könnten und damit ein Funktionsmaximum dar- stellten. Da sich das Maximum der Linie C II 2512 Å ($\tilde{\tau} = 11 \mu$ sec) nicht mit dem Entladungsgas ändert, kann geschlossen werden, daß bei allen Gasen die Maximaltemperatur $\approx 27000^\circ \text{K}$ ist.

Bei weiterer Durchsicht der Tabelle fällt als erstes auf, daß $\tilde{\tau}$ bei allen Gasen mit abnehmendem \tilde{T} zunimmt. Berücksichtigt man die Vielfalt der unter- suchten Linien und die Tatsache, daß $\tilde{\tau}$ den Zeitpunkt angibt, bei dem im Funkenplasma die mittlere Tempe- ratur $\leq \tilde{T}$ ($<$ für Nichterreichen der Normtemperatur) herrscht, so kann man, wenn man nur die erste Inten- sitätshalbwelle betrachtet, schließen, daß das Plasma, zumindest von der Zeit $\tilde{\tau}$ der Linie mit dem größten \tilde{T} an, nicht mehr aufgeheizt wird. Die noch zufließende elektrische Energie wird durch Strahlung, Kanal- ausweitung und Wärmeableitung verbraucht. Würde sich nämlich das Plasma noch weiter erhitzen, so müßten Linien mit kleinerem \tilde{T} ihr Intensitätsmaxi- mum vor solchen mit größerem \tilde{T} erreichen.

Die zweiten und folgenden Intensitätsmaxima fallen zeitlich mit den zugehörigen Strommaximas zusammen. Dies bedeutet, daß die Normtemperatur nicht mehr erreicht wird.

Geht man in der Tabelle senkrecht weiter, so läßt sich die Abnahme der Halbwertsbreite Δ mit \tilde{T} der Linien ebenfalls mit Hilfe der Temperatur erklären. So ist verständlich, daß Linien, die ihren günstigsten Anregungsbereich bei niederen Temperaturen (klei- nes \tilde{T}) haben, längere Zeit angeregt werden als solche, deren günstigster Anregungsbereich bei höheren Temperaturen liegt, wenn man beachtet, daß sich der Entladungskanal um so schneller abkühlt, je höher seine Temperatur ist (NEWTON). Höhere Temperatur- bereiche werden also in kürzerer Zeit durchlaufen als niedrigere. Dies führt zu einer Abnahme von Δ mit zunehmendem \tilde{T} , wie die Aufnahmen und die Tabelle zeigen.

Zwischen den Strommaxima erreicht die Tempe- ratur ein Minimum. Reicht diese Temperatur nicht dazu aus, daß Anregungsprozesse in noch meßbarer Anzahl stattfinden, so entsteht eine emissionsfreie Zeit, andernfalls nur ein Intensitätsminimum. Bet- rachtet man nun die Intensität-Temperaturkurven verschiedener Spektrallinien in [3], die eine Art von

Glockenkurven mit ihren Maximas bei \tilde{T} darstellen, so sieht man daraus, daß die Minimaltemperatur T_{\min} , bei der die Linie noch meßbar angeregt wird — im Falle unserer Meßbedingungen beim Kathodenstrahlzillographen beträgt die kleinste noch meßbare Intensität etwa 1% des Intensitätsmaximums — um so kleiner ist, je niedriger die Normtemperatur \tilde{T} der betrachteten Linie ist. Man kann also in erster Näherung T_{\min} proportional \tilde{T} setzen. Es ergibt sich damit zwangsläufig, daß die Höhe H des ersten Intensitätsminimums über der Intensität Null mit zunehmender Normtemperatur \tilde{T} abnehmen und die emissionsfreie Zeit Z mit \tilde{T} zunehmen muß, was die Messungen auch bestätigen.

43. Strom- und Spannungsverlauf

Aus der Unabhängigkeit des Stromverlaufes (Abb. 3) vom Entladungsgas kann geschlossen werden, daß der Funkenwiderstand R_F in den verschiedenen Gasen gegen den Widerstand R und ωL des Entladungskreises zu vernachlässigen ist.

Für den spektralen Charakter einer Funkenentladung sind nach früheren Betrachtungen der Spitzenstrom $i_0 = U_0 \sqrt{C/L}$ und der Stromanstieg dJ/dt ausschlaggebend [41]. Vergleichen wir nun die untersuchten Gase miteinander, so bleibt wegen des gleichen Stromverlaufes (Abb. 3) in allen Gasen, d.h. auch bei gleichem dJ/dt , nur noch die Funkenleistung zu berücksichtigen. Diese ist gegeben durch $J^2 \cdot R_F$ oder $U_B \cdot J$. In Argon ist U_B kleiner als in Luft, was bedeutet, daß bei gleichem Strom auch der Widerstand R_F in Luft größer ist als in Argon; von der ersten Stromhalbwellenlänge soll bei diesen Betrachtungen abgesehen werden, da die Messungen nur zwischen ± 150 V erfolgten und in diesem Bereich keine Spannungsunterschiede zeigen. Die gesamte für einen Funken zur Verfügung stehende Energie pro Entladung ist gegeben durch $E = \frac{1}{2} U^2 C \cdot R_F/R$.

Durch die höhere Funkenleistung wird in Luft die Energie E schneller verbraucht als in Argon, was zur Folge hat, daß in Argon eine größere Anzahl von Brennperioden beobachtet wird. Man kann weiter schließen, daß dadurch das Spektrum in Luft funkenähnlicher wird; die relativ kalten, letzten Brennperioden treten nicht auf und damit verschiebt sich die mittlere Temperatur nach höheren Werten [47], [48].

In Helium konnte die Brennspannung wegen der großen Streuung nicht so genau festgestellt werden, um sie mit denen in Luft und Argon vergleichen zu können. Sie liegt annähernd bei 50 V. Die Streuungen werden zurückgeführt auf die hohe Ionisierungsspannung, die Schwierigkeiten bei der Wiederzündung macht und zur Folge hat, daß ein Großteil der Ladungsträger von den Elektroden geliefert werden muß. Dies hat zur Folge, daß sich, wie beobachtet, die Elektroden sehr stark erhitzen.

Es bleibt nun noch zu klären, wie es zu dem höheren Funkenwiderstand R_F in Luft gegenüber Argon kommt. Nach GLASER [33] können wir schreiben

$$R_F = \frac{Q}{B \cdot r^2 \left(\frac{g_1}{g_0} \right)^{\frac{1}{2}} T^{\frac{3}{2}} e^{-U_j/kT}} \quad (3)$$

Die zahlenmäßige Berechnung zeigt, daß die verschiedenen gaskinetischen Querschnitte Q und statistischen Gewichte g (bezogen auf Argon und Stickstoff) auf nur eine Differenz der Funkenwiderstände von gegenüber der gemessenen von 20% ergeben. Ionisierungsenergie (U_j für Argon = 15,75 eV, Stickstoff 14,54 eV) kann nicht als Erklärung herangezogen werden, da sie einen höheren Funkenwiderstand für Argon gegenüber Luft bewirken müßte. Kanalausweitung vollzieht sich nach dem Mechanismus der Strahlungs- und Trägerdiffusion. Da mit der Temperatur zunehmen, ist letztere die entscheidende Größe auch bei der Beurteilung des Funkenwiderstandes. Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß das Gas mit dem kleineren Funkenwiderstand (Argon) die höhere Temperatur (ab der Stromhalbwellenlänge!) besitzt.

Dieser scheinbare Widerspruch zur höheren Funkenleistung in Luft wird durch die Energiebilanz [Gl. (4) in Abschnitt 44] beseitigt:

Die innere Energie E setzt sich zusammen aus thermischen Energie, der Anregungsenergie, Dissoziationsenergie und der Ionisationsenergie. Da wir wiederum Luft mit Argon, so zeigt sich, daß die zur Erhöhung von E zur Verfügung stehende Energie in Luft zu einem großen Teil durch die Ionisation (Dissoziationsenergie von $N_2 = 9,76$ eV, $O_2 = 5,08$ eV) verbraucht wird. Der Unterschied der Anregungsenergie und in der Ionisierungsenergie spielt dagegen eine untergeordnete Rolle. Bei gleicher E wird also die thermische Energie in Argon höher

44. Kanalmodell und Energiebilanz¹

Die große Anzahl der in einem Funkenplasma bekannten Parameter erfordert ein einfaches Kanalmodell. Wir betrachten in Vereinfachung das WEIZEL und ROMPE [5] angegebene Zylindermodell. Das Plasma ist eingesperrt in ein zylindrisches Rohr mit konstantem Radius, durch das der Strom J fließt, wobei die Brennspannung U entsteht. Der Druck sei konstant. Die dabei entwickelte Leistung $J^2 \cdot R_F$ wird in vier Energieformen umgesetzt:

a) Ausstrahlung $S(T)$. Diese kann vernachlässigt werden, da wir einerseits nur relative Unterschiede zwischen den einzelnen Gasen untersuchen wollen und andererseits keine Unterschiede im Intensitätsverlauf zwischen Stickstoff und der im kurzwelligen UV stark absorbierenden Luft feststellen konnten.

b) Wärmeleitung einschließlich ambipolarer Transfusionsdiffusion $\propto T$: Der allmähliche Temperaturanstieg im heißen Kern — kalte Außenhülle, wird ersetzt durch einen Temperatursprung an der Wand des gedachten Zylinders mit einem Wärmeverlust, der proportional der Wärmeleitfähigkeit κ und der Temperatur T ist ([5], S. 26).

c) Erhöhung der inneren Energie E des Plasmas. E ist eine Funktion von T allein und setzt sich zusammen aus der Translations-, der Ionisations-, der Dissoziations- und der Anregungsenergie. Für einatomige Gase gilt unter Vernachlässigung der Anregungsenergie (pro cm^3)

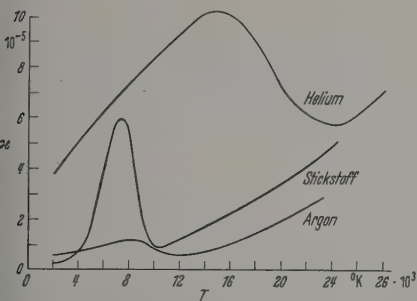
$$E = n \frac{3}{2} kT + n_1 e U_j,$$

¹ Herrn Professor H. KAISER und J. VAN CALKER U. A. danken wir für eingehende Diskussion.

eU_j die Anregungsenergie, n die Gesamteilchen-
dichte (Atome + Ionen + Elektronen) und n_1 die
Elektronendichte darstellen. Unter Her-
leitung der allgemeinen Gasgleichung ($n = P/kT$)
das erste Glied rechts $3/2 \cdot P = \text{const.}$ Die
Erregung der inneren Energie mit der Temperatur
demnach

$$\frac{dE}{dT} = eU_j \frac{dn_1}{dT}. \quad (5)$$

besonders vermerkt, daß unter den gemachten
Annahmen ($P = \text{const.}$, $V = 1 \text{ cm}^3$) die innere



Die Gesamtwärmeleitfähigkeiten von Argon [37], Stickstoff [36]
und Helium [38] als Funktion der Temperatur

bei niedrigen Temperaturen ($dn_1/dT \rightarrow 0$)
unabhängig von der Temperatur ist.

Energieverlust dQ infolge Teilchenauswanderung
aus dem Plasmazylinder (Druckausgleich). Dieser
ist in der Wärmeleitung noch nicht enthalten.

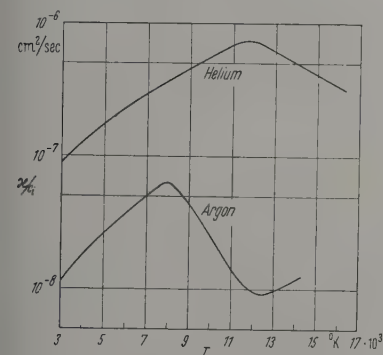


Abb. 8. κ/c_i für Argon und Helium

zusätzlich in Rechnung gestellt werden, da
er Annahme eines konstanten Druckes bei
Temperaturerhöhung Teilchen aus dem betrachteten
Zylinder auswandern müssen. Dieser Auswanderung
führt die transiente Energie $3/2 kT$ mit sich und der Bruchteil
zusätzlich die Ionisationsenergie eU_j . Damit
man

$$\frac{dQ}{dT} = - \frac{dn}{dT} \left(\frac{3}{2} kT + \frac{n_1}{n} eU_j \right). \quad (6)$$

den Gln. (5) und (6) vorkommenden Teilchen-
dichten lassen sich aus der allgemeinen Gasgleichung
von Saha-Gleichung ermitteln [30].

Setzen wir nun in den Gln. (5) und (6) die Zeit t
abhängige Variable ein und stellen dann die
Energiebilanz auf, so erhalten wir eine Differential-

gleichung, welche die Temperatur als Funktion der
Zeit beschreibt:

$$U \cdot J = a \kappa T + b c_i \frac{dT}{dt}. \quad (7)$$

Dabei wurde

$$c_i = \frac{dQ}{dT} + \frac{dE}{dT} \quad (8)$$

gesetzt.

a und b sind Geometriefaktoren, die im wesentlichen
vom Kanalradius abhängen. Läßt man die erste
Viertelwelle des Stromes außer Betracht, so kann man
 a und b als konstant annehmen, da nach GLASER [33]
zu diesem Zeitpunkt die Kanalausbreitung nahezu ab-
geschlossen ist. Unter dieser Annahme und unter der
Voraussetzung, daß κ und c_i unabhängig von der
Temperatur sind, was näherungsweise nur für kleine
Temperaturintervalle zutrifft, läßt sich Gl. (5) inte-
grieren. Der Gang der Rechnung erübrigt sich, da eine
entsprechende Gleichung bei Anregung der Fluoreszenz
mit moduliertem Licht auftritt und von BAILEY und
ROLLEFSON [46] gelöst wurde. Dabei ist rein
formell die Erregerintensität durch die zugeführte
Leistung $U \cdot J$ zu ersetzen und die Fluoreszenzinten-
sität durch die Temperatur T . Berücksichtigt man
nur den ersten Fourier-Koeffizienten von UJ , so ist
das erste Fourier-Glied der Temperatur wegen des
nahezu mäanderartigen Verlaufs von U proportional
 $\sin 2\omega t$, wenn ω die Kreisfrequenz des Funkenstromes
darstellt. Man erhält so in Analogie zum Fluoreszenz-
mechanismus als wesentliches Charakteristikum den
Modulationsgrad der Funkentemperatur

$$\text{Modulationsgrad} = \frac{1. \text{ Fourier-Koeffizient}}{0. \text{ Fourier-Koeffizient} *} = \left[1 + \left(2\omega \frac{b c_i}{a \kappa} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (9)$$

d.h. der Modulationsgrad nimmt mit κ/c_i zu.

Die Größe (9) ist ein Maß, für die Änderung der
Temperatur um einen Mittelwert bei den verschiede-
nen Stromhalbwellen. Unterhalb der Normtempe-
ratur \tilde{T} , die nach der ersten Viertelwelle nicht mehr
erreicht wird, ist die Linienintensität eine monotone
Funktion der Temperatur, so daß auch diese direkt
beobachtete Größe die Gl. (9) qualitativ befolgen
muß. In der Tabelle haben wir als reziprokes Maß für
den Modulationsgrad die Höhe H des ersten Intensi-
tätsminimums gewählt: Qualitativ ausgedrückt heißt
dies, daß H mit zunehmendem Verhältnis κ/c_i abnehmen
muß. Um diese Überlegungen mit den Messungen in
Einklang zu bringen, gilt es daher, die Wärmeleit-
fähigkeit κ und die spezifische Wärme c_i zu berechnen.
Angaben über die Wärmeleitfähigkeit von Luft und
Argon sind in der Literatur bereits vorhanden [34]
bis [37]. Neu berechnet wurden die Wärmeleitfähig-
keit von Helium [38] und die spezifische Wärme c_i für
Argon und Helium. In Abb. 7 sind zum Vergleich die
Wärmeleitfähigkeiten von Argon, Stickstoff und He-
lium dargestellt; Abb. 8 zeigt κ/c_i für Argon und
Helium.

45. Einfluß des Entladungsgases auf den zeitlichen Linienverlauf

Nach Gl. (6) ist der Modulationsgrad der Tempe-
ratur vom Verhältnis κ/c_i abhängig. Bei Temperaturen
unterhalb der Normtemperatur, also nach der ersten

* Mittlere Temperatur.

Viertelwelle des Stromes gilt dies auch für die Linienintensitäten, da diese in diesem Temperaturbereich eine monotone Funktion der Temperatur sind. Vergleichen wir nun für Argon und Helium das berechnete Verhältnis κ/c_i mit dem beobachteten Modulationsgrad (H in Tabelle), so ergibt sich eine qualitative Übereinstimmung zwischen der Theorie und den Beobachtungen: Der Modulationsgrad ist gemäß dem größeren κ/c_i in Helium größer als in Argon. Es ist noch zu bemerken, daß sich die spezifischen Wärmen c_i in diesen beiden Gasen im Gegensatz zu den Wärmeleitfähigkeiten nur wenig voneinander unterscheiden. Die Unterschiede in den Beobachtungen sind also in erster Linie auf die Unterschiede in den Wärmeleitfähigkeiten zurückzuführen (Abb. 7 und 8).

Beim Wechsel des Entladungsgases Argon—Luft ergaben die Messungen ebenfalls eine Zunahme des Modulationsgrades. Wir können also sagen, daß die Temperatur zwischen den Strommaximas in Argon höher liegt als in Luft und Helium, oder mit anderen Worten: In Argon sind die Energieverluste des Plasmaschlauchs am geringsten.

Für den Energietransport aus dem Entladungskanal heraus ist neben der Wärmeleitung auch die Strahlung verantwortlich. Da aber um so mehr Strahlungsenergie aus dem Plasma austritt, je geringer seine Absorption ist, kann wegen der starken UV-Absorption des Sauerstoffs in der Luft der Strahlungsverlust nicht als Erklärung für die schwächere Abkühlung in der Luft herangezogen werden. Dies müßte gerade das Gegenteil bewirken. Andererseits wurden auch keine Unterschiede im Intensitätsverlauf zwischen Stickstoff und Luft beobachtet (Stickstoff absorbiert ab 1350 Å, Luft ab 2000 Å). Man kann also schließen, daß der Anteil der Strahlungsverluste an der Energieabführung gegenüber der Wärmeleitung zu vernachlässigen ist.

Ein Vergleich der Wärmeleitfähigkeiten (Abb. 7) zeigt deutlich die größere Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff und Helium gegenüber Argon (die Wärmeleitfähigkeit von Stickstoff dürfte sich wegen des hohen Prozentsatzes von N_2 in Luft gegenüber der von Luft nicht wesentlich unterscheiden).

Zusammenfassung

Der Einfluß des Entladungsgases bei Funkenentladungen auf die Linienintensität liefert nach den bisherigen Veröffentlichungen kein einheitliches Bild. Bezogen auf Luft ergab sich bei manchen Linien eine Verstärkung, bei anderen eine Schwächung der Intensität, wenn man das Entladungsgas wechselte.

Orientierende Versuche und Betrachtungen der Energiebilanz im Funkenplasma wiesen darauf hin, daß die Wärmeleitfähigkeit des Entladungsgases eine entscheidende Rolle spielt. Neben Luft (Stickstoff) bot sich als Untersuchungsgas Argon mit kleinerer und Helium mit größerer Wärmeleitfähigkeit an. Für Helium mußte diese erst, besonders für hohe Temperaturen, aus bekannten Gesetzen mit notwendigen Abschätzungen berechnet werden.

Die Ergebnisse waren:

1. Der zeitliche Verlauf des Stromes ist in allen drei untersuchten Gasen gleich.
2. Die Brennspannungen in Luft liegen in jeder Bogenperiode wegen der größeren Wärmeleitfähigkeit

höher als in Argon. Die Zahl der Brennperioden/Einzelfunke betrug in Argon bis zu sechs, in Luft zu fünf und in Helium meist nur vier. Die Zunahme der Zahl der Halbwellen konnte zurückgeführt werden auf die Zunahme der Funkenenergie pro Wellenlänge mit der Wärmeleitfähigkeit — die Kondensationsenergie wird dadurch schneller verbraucht — und die Zunahme der Wiedertzündspannungen.

3. Der Modulationsgrad der Linienintensität ist folglich auch der Temperatur nimmt in der Reihenfolge der Wärmeleitfähigkeiten Argon—Luft—Helium zu. Dies konnte durch Aufstellung der Energiebilanz erklärt werden.

4. Eine Abschätzung der Maximaltemperatur des Plasmas ergab $T_{\max} = 27000^\circ \text{K}$. Sie tritt auf $t \leq 11 \mu\text{sec}$ nach dem Durchschlag und ist in allen untersuchten Gasen annähernd gleich.

Da die aus integrierten Messungen [38] gewonnene mittlere Temperatur für Argon und Luft annähernd gleich ist, aus den zeitlich aufgelösten Messungen hingegen ein höherer Modulationsgrad bei Luft gefunden wurde, ergibt sich, daß bei Luft in den einzelnen Halbwellen Gebiete höherer Temperaturen durchlaufen werden, während bei Argon das Plasma in den Strommaxima weniger aufgewärmt wird. In den stromlosen Zeitintervallen aber auch weniger abgekühlt wird. Dadurch werden in Luft die Linien bevorzugt angeregt; das Spektrum wird gegenüber Argon funkenähnlicher.

Dem Institutsleiter Herrn Professor Dr. G. SCHÖNTAG danken wir für großzügige Förderung der Arbeit. Die Mittel hierzu stammten von der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Der Funkenerzeuger wurde uns vom Forschungsfond des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute zur Verfügung gestellt. Diesen beiden Institutionen möchten wir für das Zustandekommen der Arbeit auch an dieser Stelle unseren verbindlichen Dank aussprechen.

Literatur: [1] ENGEL, A. v., u. M. STEENBECK: *Elektrische Gasentladungen*. 1932. — [2] ROMPE, R., u. M. STEENBECK: *Ergebn. exakt. Naturw.* **18**, 257 (1939). — [3] SÖLD, A.: *Physik der Sternatmosphären*. 1955. — [4] ZOW, N.: *Elektrische Vorgänge in Gasen und im Vakuum*. 1955. — [5] WEIZEL, W., u. R. ROMPE: *Theorie der elektrischen Lichtbögen und Funken*. 1949. — [6] MAECKER, H.: *Ergebn. exakt. Naturw.* **25**, 293 (1951). — [7] GRANOWSKI, J.: *Der elektrische Strom und das Gas*. 1955. — [8] FINKELBURG, W., u. H. MAECKER: *Handbuch der Physik*, **1**, 1956. — [9] LEOB, LEONHARD und MEEK: *The Mechanism of the El. Spark*. 1941. — [10] MEEK, J., and J. GRAY: *Electr. Breakdown of Gases*. 1953. — [11] SCHEIBE, A. SCHÖNTAG: *Arch. Eisenhüttenw.* **8**, 533 (1934). — [12] LER, B., C. REIMER und J. LOOFBOUROW: *J. Opt. Soc. Amer.* **40**, 751 (1950). — [13] VALLEE, B., and S. ADELSTEIN: *Opt. Soc. Amer.* **42**, 295 (1952). — [14] STONE, H.: *J. Soc. Amer.* **44**, 411 (1954). — [15] BESZED, S., u. A. SCHÖNTAG: *Z. wiss. Photogr.* **52**, 75 (1957). — [16] BESZED, S., u. A. SCHÖNTAG: *Z. wiss. Photogr.* **52**, 209 (1958). — [17] MAECKER, M., S. ADELSTEIN and B. VALLEE: *J. Opt. Soc. Amer.* **46**, 138 (1956). — [18] SUITS, C.: *Phys. Rev.* **55**, 561 (1944). — [19] PARK, J.: *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **39** (1947). — [20] DELSTAM, L.: *Proc. 6. Int. Conf. Spectr.* 1957. — [21] FINKELBURG, W.: *Spectrochim. Acta* **7**, 264 (1955). — [22] BLITZ, J., and M. WILLOUGHBY: *J. Opt. Soc. Amer.* **41**, 440 (1951). — [23] STETTER, A.: *Spectrochim. Acta* **5**, 350 (1953). — [24] JÜRGENS, G.: *Z. Physik* **134**, 21 (1952). — [25] CUNDA, and D. GRAGGS: *Spectrochim. Acta* **9**, 68 (1957). — [26] RITZKY, H., and G. SUITS: *Physica* **6**, 190 (1953). — [27] MAECKER, G.: *Z. Physik* **130**, 585 (1951). — [28] ORNSTEIN, B. v. WIJK: *Proc. Amsterdam* **33**, 44 (1930). — [29] LEOB, HOLTGREVEN, W., u. H. MAECKER: *Z. Physik* **105**, 1 (1951).

LARENZ, R.: Z. Physik **129**, 327 (1951). — [31] SPAETH, H. H. KREMPL: Z. angew. Phys. **12**, 7 (1960). — [32] TH, H.: Diss. T. H. München 1958. — [33] GLASER, G.: Physik **143**, 44 (1955). — [34] MEIXNER, J.: Z. Naturforsch. **1952**). — [35] SPITZER, L.: Phys. Rev. **89** (1953). — [36] KORN, F.: Z. Physik **155**, 42 (1959). — [37] BUSZ-PEÜ, G., u. W. FINKELNBURG: Z. Physik **146**, 655 (1956). — EICHINGER, R.: Diss. T. H. München 1960. — [39] CAL, J. VAN: Z. Naturforsch. **11**, 612 (1956). — [40] KAISER, H.: rochim. Acta **2**, 229 (1941/44). — [41] FELDKEICHERNER, H., KREMPL: Arch. Eisenhüttenw. **27**, 621 (1956). — [42] ROHOFER, J., u. H. KREMPL: Z. angew. Phys. **12**, 159

(1960). — [43] KESSLER, W., u. G. SCHEIBE: Glastechn. Ber. **32** K, 1/33 (1959). — [44] PREUSS, E.: Colloquium Spectroskopikum Internat. VI (Amsterdam) 1956, S. 457. Spectrochim. Acta **8** (1956). — [45] NORDMEYER, M.: Arch. Eisenhüttenw. **30**, 12 (1959). — [46] BAILEY, E. A., and G. K. ROLFSON: J. Chem. Phys. **21**, 1315 (1953). — [47] LAQUA, K.: Spectrochim. Acta **4**, 446 (1952). — [48] HAGENAH, W. D.: Rev. Universelle des Mines **15**, 1 (1959).

Dr. RUDOLF EICHINGER und Dr. HANS KREMPL,
Physikalisch-Chemisches Institut
der Technischen Hochschule, München

Die Bestimmung des „Farbstiches“ und des „Grauwertes“ von trüben Kunststoffen (Polyäthylen) mit einem Remissionsphotometer

Von REINHARD HUBER

Mit 7 Textabbildungen

(Eingegangen am 28. Februar 1960)

Bis heute hat sich keine Methode zur Bestimmung aktiver Maßzahlen für die Beurteilung der Färbung des Grauteils von teilkristallinen ungefärbten Kunststoffen einbürgern können, da die Beurteilung Probe stark von der Art der Beleuchtung und der der Hinterlegung abhängt. Dem Begutachter b in der Praxis nur der Weg, Musterproben von en Kunststoffen vergleichend einzuordnen. Da en sind objektive Meß- und Auswerteverfahren für durchsichtige Stoffe (Gläser) und für lichtun- schlässige Proben (Oberflächenfarben) seit langem annt und werden häufig angewendet. Das Ziel er Arbeit ist, auch das zwischen den beiden ge- nten Extremen liegende Gebiet durch objektive werte und daraus berechenbare Maßzahlen zu ssen, deren Genauigkeit und Aussagewert für die rteilung von Farbstich und Grauwert ausreicht.

teilweise dadurch vermindert, weil die in der Schicht erfolgten Streuungen in beliebige Richtungen ihrer- seits wieder in die Einstrahlungsrichtung gestreut wer- den. Als Betrag hierfür setzten KUBELKA und MUNK an: $s \cdot \Phi_r \cdot dx$, wobei Φ_r der Lichtstrom ist, der an der

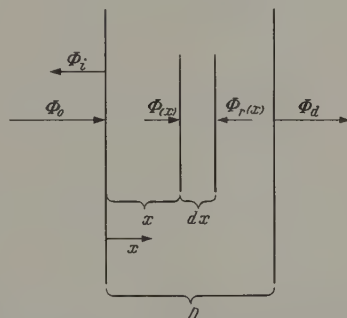


Abb. 1. Schematische Darstellung der Lichtströme zur Aufstellung der Differentialgleichungen

I. Theoretische Grundlagen

Eine planparallele Platte, deren Flächenausdeh- ung im Verhältnis zu ihrer Schichtdicke groß sei, de völlig diffus (Ulbricht-Kugel) von einer Seite Licht einer bestimmten Wellenlänge beleuchtet. ch P. KUBELKA und F. MUNK [1] braucht bei der hnung nur die senkrecht zur Schicht einfallende hlung betrachtet zu werden, denn hierbei auf- ende Fehler werden um so kleiner sein, je voll- mender die Beleuchtung ideal diffus ist. In der enden Rechnung sei deshalb nur der senkrecht Oberfläche einfallende Lichtstrom betrachtet.

In der Schicht der Dicke D wird nun ein Teil des fallenden Lichtstromes (Φ_0) absorbiert, ein Teil rückgestreut (Φ_i) und der Rest (Φ_d) durchgelassen (s. hierzu Abb. 1). In der Differentialschicht der ke dx wird also der Teil $m \cdot \Phi \cdot dx$ absorbiert, an m den natürlichen Extinktionsmodul¹ bedeutet. r Anteil $s \cdot \Phi \cdot dx$, mit s als Streukoeffizient, wird treut. Der Verlust an Lichtintensität in der Ein- strichtung, der durch Streuung auftritt, wird aber

Rückseite der Differentialschicht eintritt. (Eine Reflexion an der Oberfläche werde zunächst vernach- lässigt.)

Die auf KUBELKA und MUNK zurückzuführenden Differentialgleichungen lauten:

$$d\Phi = -(m + s) \Phi dx + s \Phi_r dx, \quad (1a)$$

$$d\Phi_r = (m + s) \Phi_r dx - s \Phi dx. \quad (1b)$$

Diese Gleichungen haben bereits auch G. KORTÜM und H. SCHÖTTLER [2] bei der Untersuchung an licht- streuenden Pulvern angewendet. Auch G. SCHREYER [3] greift auf diese Differentialgleichungen bei der Be- handlung der diffusen Reflexion an Pulvern zurück und zeigt in der genannten Arbeit anschaulich die Gewinnung der Differentialgleichungen. Die Lösung des Differentialgleichungssystems führt SCHREYER allerdings mit Randbedingungen durch, die theore- tisch nur bei einer unendlich dicken Platte gegeben sind. Für trübe Stoffe sind die Randbedingungen jedoch anders zu wählen.

Die allgemeinen Lösungen der Differentialglei- chungen seien nicht im einzelnen abgeleitet. Sie

¹ Nach DIN 1349 wäre der natürliche Extinktionsmodul m_n zu bezeichnen. Da eine Verwechslung mit dem dekadischen Extinktionsmodul (m) nicht zu befürchten ist, wird in der Arbeit auf den Index n verzichtet.

lauten:

$$\Phi = A(1-b)e^{ax} + B(1+b)e^{-ax}, \quad (2a)$$

$$\Phi_r = A(1+b)e^{ax} + B(1-b)e^{-ax}, \quad (2b)$$

wobei sich a zu:

$$a = + \sqrt{m^2 + 2ms} \quad (3a)$$

und b zu:

$$b = + \sqrt{\frac{m}{m+2s}} \quad (3b)$$

berechnet.

An der Stelle $x=0$ ist $\Phi = \Phi_0$ und $\Phi_r = \Phi_i$ und an der Stelle $x=D$ ist $\Phi = \Phi_d$ und $\Phi_r = 0$.

Mit diesen vier Randbedingungen erhält man aus den Gln. (2a) und (2b) die vier Beziehungen:

$$\Phi_0 = A(1-b) + B(1+b), \quad (4a)$$

$$\Phi_i = A(1+b) + B(1-b), \quad (4b)$$

$$\Phi_d = A(1-b)e^{aD} + B(1+b)e^{-aD}, \quad (4c)$$

$$0 = A(1+b)e^{aD} + B(1-b)e^{-aD}. \quad (4d)$$

Aus den Gln. (4a) und (4d) lassen sich die Koeffizienten A und B bestimmen:

$$A = \frac{\frac{\Phi_0}{1+b}}{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1-b}{1+b} \cdot e^{2aD}}, \quad (5a)$$

$$B = \frac{\frac{\Phi_0}{1-b}}{\frac{1+b}{1-b} - \frac{1-b}{1+b} \cdot e^{-2aD}}. \quad (5b)$$

In die Gln. (4b) und (4c) setzt man A und B entsprechend den Gln. (5a) und (5b) ein und erhält:

$$\frac{\Phi_i}{\Phi_0} = \frac{1}{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1+b}{1-b} \cdot e^{2aD}} + \frac{1}{\frac{1+b}{1-b} - \frac{1-b}{1+b} \cdot e^{-2aD}}, \quad (6a)$$

$$\frac{\Phi_d}{\Phi_0} = \frac{e^{aD}}{1 - \frac{(1+b)^2}{(1-b)^2} \cdot e^{2aD}} + \frac{e^{-aD}}{1 - \frac{(1-b)^2}{(1+b)^2} \cdot e^{-2aD}}. \quad (6b)$$

Die Gl. (6a) läßt sich nach e^{2aD} auflösen:

$$e^{2aD} = \frac{\frac{\Phi_i \cdot (1-b)}{\Phi_0 \cdot (1+b)} - 1}{\frac{\Phi_i \cdot (1+b)}{\Phi_0 \cdot (1-b)} - 1}. \quad (7)$$

Setzt man den Wert von e^{2aD} in Gl. (6b) ein und löst nach e^{aD} auf, so erhält man nach Vereinfachung:

$$e^{aD} = \frac{\frac{\Phi_d}{\Phi_0}}{1 - \frac{\Phi_i \cdot (1+b)}{\Phi_0 \cdot (1-b)}}. \quad (8)$$

Eine Gleichung für b als Funktion von Φ_i und Φ_d läßt sich gewinnen, wenn man berücksichtigt, daß die quadrierte Gl. (8) der Gl. (7) entsprechen muß. Nach Vereinfachung wird dann für b erhalten:

$$b = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\Phi_i}{\Phi_0}\right)^2 - \left(\frac{\Phi_d}{\Phi_0}\right)^2}{\left(1 + \frac{\Phi_i}{\Phi_0}\right)^2 - \left(\frac{\Phi_d}{\Phi_0}\right)^2}}. \quad (9)$$

Nur die positive Wurzel hat einen Sinn, da b eine Funktion von m und s ist und diese beiden Koeffizienten nicht negativ werden können.

Mit der Kenntnis von b , kann jetzt auch aus Gl. (8) angegeben werden:

$$a = \frac{\ln \frac{\frac{\Phi_d}{\Phi_0}}{1 - \frac{\Phi_i(1+b)}{\Phi_0(1-b)}}}{D}.$$

Die Größen a und b sind mit m und s durch die Gln. (3a) und (3b) verknüpft. Aus diesen Gleichungen lassen sich also m und s angeben:

$$m = a \cdot b, \quad (10a)$$

$$s = a \frac{1-b^2}{2b} = m \frac{1-b^2}{2b^2}. \quad (10b)$$

Die Koeffizienten m und s sind nur Funktionen der Größen Φ_i und Φ_d im Verhältnis zu Φ_0 .

Bei dem benutzten Remissionsphotometer „Epho“ der Firma Zeiss, kann nach dem Abgleich des Verhältnisses von Φ_i zu Φ_0 direkt in Prozent abgelesen werden, wenn eine Oberflächenreflexion außer Acht gelassen wird. Das Verhältnis von reflektiertem Lichtstrom zum Anfangslichtstrom ist laut Definition gleich dem inneren Reflexionsgrad ρ_i . Φ_i/Φ_0 ist aber dann im Sinne der Ableitung eine direkte Meßgröße, wenn die Probe von hinten nicht beleuchtet wird, ihre Oberfläche nicht reflektiert. Unter Vernachlässigung der Oberflächenreflexion wird ρ_i erhalten, wenn der Reflexionsgrad der Probe bei Schwarzhinterlegung bestimmt wird, d.h. bei einer nicht reflektierenden Hinterlegung, die in der Praxis ausreichend durch schwarzen Samt verwirklicht wird¹.

Ist die Oberflächenreflexion nicht vernachlässigbar klein, so wird am Remissionsphotometer der gesamte Reflexionsgrad bei Schwarzhinterlegung $\rho_s (= \Phi_s/\Phi_0)$ abgelesen, der bei Kenntnis des Oberflächenreflexionsgrades (ρ_r) in den „inneren Reflexionsgrad“ ρ_i umgerechnet werden kann [Gl. (10)].

Das in Abb. 2a dargestellte Schema gibt für ρ_r den Gang der Lichtintensitäten an, unter denen Beträge der auf den Anfangslichtstrom bezogenen Lichtströme verstanden werden sollen. Es ist also Anfangslichtintensität $\Phi_0/\Phi_0 = 1$, der Betrag des Absorptionsgrades $\rho_a = \Phi_a/\Phi_0$, der Betrag des inneren Reflexionsgrades $\rho_i = \Phi_i/\Phi_0$ und der Betrag des Reflexionsgrades $\rho = \Phi_d/\Phi_0$. Will man die Oberflächenreflexion ρ_r berücksichtigen (s. Abb. 2b), so muß beachtet werden, daß nunmehr an jeder Grenzfläche eine Aufspaltung der ankommenden Intensitäten erfolgt. Vernachlässigt man die innerhalb der Probe hin- und herreflektierten Intensitäten², so entspricht die

¹ Über die Korrektur bei geringer Reflexion des Samtes weiter unten bei den Gln. (17) und (18). — An dieser Stelle sei bemerkt, daß das genannte Remissionsphotometer nicht das Lichtstromverhältnis, sondern das Leuchtdichteverhältnis (= Remissionsgrad β) mißt. Bei den angenommenen Bedingungen: ideal diffuse Beleuchtung, Gültigkeit des Lambertischen Gesetzes und der Differentialgleichungen von KUBELKA und MUNK, sind Reflexionsgrad und Remissionsgrad einander gleich. Zur Vereinfachung werden bei der Beschreibung der Meßergebnisse die Symbole beibehalten, die sonst nur bei Reflexion anzuwenden sind.

² Siehe zur Berücksichtigung der Vernachlässigung der Reflexion Gl. (12) bei F. KOHLRAUSCH, Praktische Physik, 8. Aufl. S. 502: Teubner 1955.

Rückseite der Probe austretende Lichtintensität ϑ , Durchlaßgrad τ und der Gesamtbetrag des reflektierten Anteils entspricht dem mit einem Remissionsometer leicht meßbaren Reflexionsgrad ϱ_s bei Vorhinterlegung. Aus der Abb. 2b kann man ablesen:

$$\tau = \vartheta(1 - \varrho_r)^2 \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \varrho_s &= \varrho_r + \varrho_i(1 - \varrho_r)^2 + \vartheta^2(1 - \varrho_r)^2 \varrho_r \\ &= \varrho_r + \varrho_i(1 - \varrho_r)^2 + \frac{\tau^2 \cdot \varrho_r}{(1 - \varrho_r)^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

erlegt man die Probe mit dem ohnehin vorhandenen und mit seinem Reflexionsgrad (ϱ_{st}) bekannten Standard, so ergibt sich für die Beträge der Lichtintensitäten ein Schema, wie es in Abb. 2c dargestellt ist. Die Summe der reflektierten Anteile entspricht dem Remissionsgrad (ϱ_w) bei Hinterlegung dem Weißstandard. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_w &= \varrho_s + \tau^2 \varrho_{st} + \tau^2 \varrho_{st}^2 \varrho_s + \tau^2 \varrho_{st}^3 \varrho_s^2 + \dots \\ &= \varrho_s + \tau^2 \varrho_{st} (1 + \varrho_s \varrho_{st} + \varrho_s^2 \varrho_{st}^2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Klammerausdruck in Gl. (14) ist eine geometrische Reihe der allgemeinen Form:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1 - a}, \text{ wenn } |a| < 1 \text{ ist.}$$

(14) kann also auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\varrho_w = \varrho_s + \frac{\tau^2}{\varrho_{st} - \varrho_s} \quad (15)$$

nach τ aufgelöst:

$$\tau = \sqrt{(\varrho_w - \varrho_s) \left(\frac{1}{\varrho_{st}} - \varrho_s \right)} \quad (16a)$$

ϑ ergibt sich mit Gl. (12):

$$\vartheta = \frac{\sqrt{(\varrho_w - \varrho_s) \left(\frac{1}{\varrho_{st}} - \varrho_s \right)}}{(1 - \varrho_r)^2} \quad (16b)$$

ist also mit einem Remissionsphotometer aus zwei Messungen möglich — einmal bei Schwarz- und einmal Weißhinterlegung — den Durchlaßgrad τ zu bestimmen, wenn ϱ_r gleich Null oder anderweitig bekannt (ϱ_r kann gegebenenfalls auch aus der Fresnelschen Formel über den Brechungsindex abgeschätzt werden.) Über die Gl. (12) kann τ in ϑ genügend genau umgerechnet werden, und ϱ_i erhält man aus Gl. (13) mit dem Meßwert ϱ_s . Kann die Oberflächenreflexion vernachlässigt werden, so ist $\varrho_s = \varrho_i$.

Setzt man ϱ_i und ϑ in die Gln. (9) und (10) ein, so können die Koeffizienten m und s berechnet werden.

Will man eine Korrektur des gemessenen ϱ_s -Wertes durchführen, weil der hinterlegte Samt doch eine geringe Reflexion besitzt, also als gering grau anzusprechen ist, so setzt man in der Form von Gl. (15) eine weitere Gleichung an:

$$\varrho_g = \varrho_s + \frac{\tau^2}{\varrho_{stg} - \varrho_s} \quad (17)$$

bedeuten ϱ_{stg} den Reflexionsgrad des schwarzen Samtes und ϱ_g den Reflexionsgrad der Probe bei Hinterlegung dem schwarzen Samt. Die Gln. (15) und (17) lassen sich für τ^2 gleichsetzen, und die entstandene Beziehung nach dem

korrigierten Reflexionsgrad ϱ_s bei absoluter Schwarzhinterlegung aufgelöst lautet dann:

$$\varrho_s(\text{Korr}) = \frac{\varrho_g - \varrho_w}{\frac{1}{\varrho_{stg}} - \frac{1}{\varrho_{st}} - (\varrho_w - \varrho_g)} \quad (18)$$

Auf der Grundlage von Gl. (15) kann auch der Reflexionsgrad der Probe bei jeder beliebigen und in ihrem Remissionswert bekannten Hinterlegung ausgerechnet werden.

Die hier benutzten Differentialgleichungen gelten aber nur für ideal streuende Stoffe, d. h. die Streuung muß unabhängig von der Lichtwellenlänge (λ) sein.

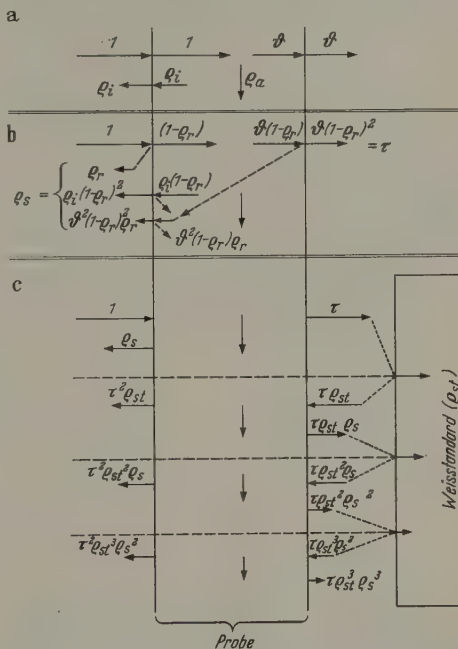


Abb. 2a—c. Schematische Darstellung der Lichtintensitäten. a Zur Berechnung des Durchlaßgrades ohne Berücksichtigung der Oberflächenreflexion; b zur Berechnung des Durchlaßgrades mit Berücksichtigung der Oberflächenreflexion; c zur Berechnung des Remissionsgrades bei Hinterlegung der Probe mit dem Weißstandard

Dies ist aber zumindest bei Polyäthylenproben nur angenähert der Fall und für verschiedene Proben-dicken sind unterschiedliche Absorptions- und Streukoeffizienten zu erwarten. In der Praxis ist aber bei der betrieblichen Messung von ungefärbten kristallinen Kunststoffen, insbesondere des Polyäthylens, nur eine Beurteilung des „Farbstiches“ und des „Grauwertes“ von Interesse. Es ist deshalb zweckmäßig, nicht die Koeffizienten bei verschiedenen Wellenlängen selbst, sondern das Verhältnis von m/s zu betrachten, so daß die Dicke D in die Rechnung nicht eingeht. Aus den Gln. (11a) und (11b) folgt nämlich mit Gl. (9):

$$\frac{m}{s} = \frac{2b^2}{1 - b^2} = \frac{(1 - \varrho_i)^2 - \vartheta^2}{2 \cdot \varrho_i} \quad (19)$$

Bei vernachlässigbar kleiner Oberflächenreflexion wird ϱ_i zum Meßwert ϱ_s und ϑ wird τ . In Gl. (19) kann dann $\vartheta (= \tau)$ durch Gl. (16a) ersetzt werden. Es ist dann:

$$\frac{m}{s} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\varrho_{st}} \frac{(\varrho_w - \varrho_s)}{\varrho_s} + \varrho_w - 2 \right\} \quad (19a)$$

Für Übersichtsmessungen braucht nicht jeweils jedes Meßpaar für sich ausgerechnet zu werden, wenn man für jeden vorkommenden Wert von ϱ_{st} einmal ein Nomogramm ausrechnet, wie ein solches beispielsweise in Abb. 3 für einen ϱ_{st} -Wert von 81,3% ohne Berücksichtigung der Oberflächenreflexion dargestellt ist. Die Benutzung von Nomogrammen zur Ermittlung der Koeffizienten m und s empfiehlt sich wegen des langen Rechenganges erst recht. Wenn diese Nomogramme die Auftragung von mD und sD als Funktion von ϑ und ϱ_i enthalten, sind diese sogar allgemein gültig, da die anderen Größen ϱ_{st} und ϱ_r in ϱ_i und ϑ eingehen.

Will man eine Maßzahl zur Beurteilung des Farbstiches gewinnen, so braucht bei fast weißen Proben meist nicht über das ganze sichtbare Spektrum gemessen zu werden, sondern es genügt jeweils ein Meßpaar (ϱ_s und ϱ_w) bei solchen Lichtwellenlängen,

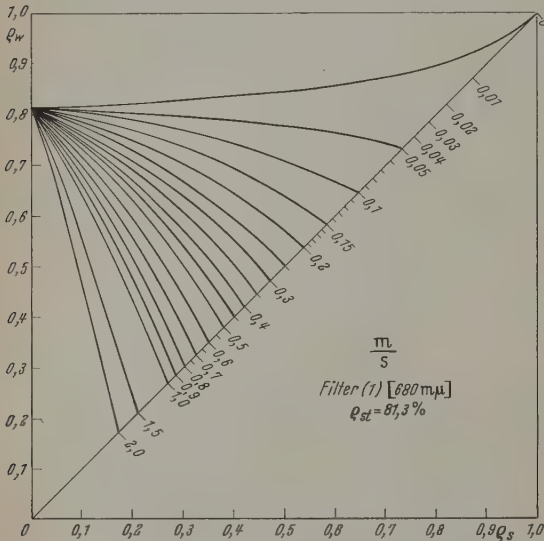


Abb. 3. Nomogramm von m/s als Funktion von ϱ_s und ϱ_w für einen Standard mit $\varrho_{st} = 81,3\%$, ohne Berücksichtigung der Oberflächenreflexion, nach Gl. (19a) berechnet

die an den beiden Grenzen des sichtbaren Wellenlängenspektrums liegen. Das benutzte Remissionsphotometer gestattet diese Grenzmessungen bei 680 $m\mu$ (hellrot) und bei 420 $m\mu$ (dunkelblau). Die im Gerät eingebauten Filter haben für diese Wellenlängen die Nummern 1 (680 $m\mu$) und 7 (420 $m\mu$). Der Einfachheit halber werden in dieser Arbeit die Filternummern als Indizes benutzt, soweit eine Unterscheidung nach der Wellenlänge notwendig ist.

Eine für die Praxis ausreichend charakteristische Maßzahl für den Farbstich wird aus der Differenz der Koeffizientenverhältnisse bei den Grenzwellenlängen erhalten, die mit F bezeichnet werden soll:

$$F = \frac{m_{(1)}}{s_{(1)}} - \frac{m_{(7)}}{s_{(7)}} \quad (20)$$

Bei ungefärbten Proben entscheidet das Vorzeichen von F über die Art, und die Größe des Absolutbetrages über die Stärke des Farbstiches. Gl. (20) ist auf „Gelbstich“ zugeschnitten, da F bei Gelbstich positiv, bei Blaustich dagegen negativ ist. Einer reinweißen Probe wäre ein F -Wert von Null zuzuordnen. Unter der Voraussetzung, daß m/s über der Wellenlänge aufgetragen, keine ausgeprägten Maxima oder Minima aufweist, würde eine Probe dann noch

als weiß anzusprechen sein, wenn ihr F -Wert im Bereich von $-0,025$ bis $+0,025$ liegt. Ein Gelbstich ist erkennbar, wenn F etwa die Werte zwischen $+0,025$ und $+0,1$ annimmt. Recht gut kann der Gelbstich im Bereich von $+0,1$ bis $0,2$ erkannt werden wird bei F -Werten größer als $0,2$ geradezu auffallen.

Für den Grauwert (G) bietet sich als Maßzahl die Summe aus den beiden m/s -Werten an:

$$G = \frac{m_{(1)}}{s_{(1)}} + \frac{m_{(7)}}{s_{(7)}}$$

Die Gl. (21) entspricht einer Mittelung über beide m/s -Verhältnisse. Die subjektiven Grenzen der Kennbarkeit des Grauwertes würde der Verfasser in folgendermaßen legen:

Für G von 0 bis 0,25 — Grauwert kaum erkennbar
für G von 0,25 bis 0,5 — Grauwert erkennbar,
für G von 0,5 bis 1,0 — Grauwert gut erkennbar
und
für G größer als 1,0 — Grauwert auffallend¹.

Die Wahl der Verhältnisse von m/s zur Beurteilung des Grauwertes ist nicht allein durch die Unabhängigkeit von der Probendicke gerechtfertigt, sondern berücksichtigt auch die Tatsache, daß die Absorption in der Probe dem Auge um so weniger auffällt, je kleiner die Eindringtiefe, d. h. je größer der Streukoeffizient ist. Ein relativ graues aber durchsichtiges Material mit hoher Absorption und geringem Streuvermögen kann durch Einbau von Streuzentren — allerdings zu Kosten der Durchsichtigkeit — stark „aufgehellt“ werden, wie dies beispielsweise bei der Papierherstellung bereits seit langer Zeit geschieht.

Die Betrachtung des Absorptions- oder des Streukoeffizienten für sich allein hat für die Grauwertbeurteilung kaum eine Bedeutung, dagegen kann für Verfahrenssteuerungen und Produktionskontrolle auch die Betrachtung der Koeffizienten selbst wichtig werden.

II. Meßergebnisse

Der Aussagewert der im ersten Teil beschriebenen Beurteilung von Farbstich und Grauwert läßt sich recht gut aus Messungen von Natur-Polyäthylensorten abschätzen. Da man zur Beurteilung trüber Stoffe auf Vergleichsmuster angewiesen ist, ist es jetzt recht schwierig, die gewonnenen Maßzahlen sicher zu beurteilen, ohne daß man Gelegenheit hat, mit Mustern vergleichen zu können. Aus der Reihe der Polyäthylentypen sind aber charakteristische Typen, wie Niederdruck-Polyäthylen hoher Dichte, Niederdruck-Polyäthylen nach dem Ziegler-Verfahren oder Hochdruck-Polyäthylen doch bereits so bekannt geworden, daß wenigstens eine Abschätzung der weiter unten angegebenen Maßzahlen erfolgen kann.

Die wichtigsten Polyäthylentypen seien kurz skizziert: Das Hochdruck-Polyäthylentypen ist relativ durchsichtig, erscheint dem Betrachter aber etwas grau, während das Polyäthylentypen nach dem Ziegler-Verfahren (Niederdruck-Polyäthylen hoher Dichte) einen hohen Streukoeffizienten und nur geringe Absorption aufweist und dem Auge als verhältnismäßig

¹ Die hier mitgeteilten subjektiven Zahlenangaben beziehen sich auf Polyäthylentypen ohne Berücksichtigung der Oberflächenreflexion.

sißer Stoff erscheint. Das Niederdruck-Poly- nach dem Ziegler-Verfahren liegt mit seinen Eigenschaften zwischen dem des Hoch- Polyäthylens und dem des Niederdruck-Poly- ens hoher Dichte. Die Farbtönungen — soweit davon überhaupt sprechen kann — zeigen meist mehr oder weniger ausgeprägten Gelbstich. Das von der Proben hängt aber nicht nur von der Dichte des Grundstoffes ab, sondern in viel stärkerem Maße von der Vorbehandlung der Probe. Hier sind zwei Fälle in erster Linie Überhitzung, Abkühlgeschwindigkeit und zu lange intensive Belichtung zu nennen.

Die gemessenen Proben waren durch Pressen aus Pulvern, Granulaten oder gespritzten Formstücken bei Temperaturen zwischen 140° und 180° C und mit der Zielung einer glatten Oberfläche zwischen Aluminiumfolien hergestellt. In jüngster Zeit konnte festgestellt werden, daß bei manchen Ziegler-Polyäthylene, besonders der Grauwert sehr stark von der Abkühlgeschwindigkeit im Temperaturbereich der Kristallisation abhängt. Sollen beispielsweise aus dem Grauwert Aussagen über die Güte des Produktes gemacht werden, so muß die Herstellung der Proben normiert sein.

Für die Messung mit dem Remissionsphotometer der Firma Zeiss sind plattenförmige Proben einer Dicke ab 0,5 mm geeignet, wenn sie mindestens eine Kreisfläche von 45 mm Ø bedecken. Obwohl die Öffnung der Ulbricht-Kugel des Elrepho einen kleineren Durchmesser hat, ist zur Auswertung von Randeffekten eine größere Probenfläche ratsam.

Die günstigste Probendicke liegt zwischen 1 und 2 mm. Sehr dünne Proben liefern zwar wegen des geringen Randeffektes die genaueren, aber am wenigsten unterschiedlichen Meßwerte. Außerdem fallen dünnen Proben Dickenschwankungen stärker ins Gewicht. Bei sehr dicken Proben geht dagegen die Genauigkeit des Gerätes verloren.

Für verschiedene Polyäthylenproben sind in Abb. 4 die gemessenen Werte von ρ_s und ρ_w über der Wellenlänge λ aufgetragen. Ebenso können die Werte benutzt werden und mit eingezeichneten Weißstandards, die Wellenlängen mit ihren zugehörigen Filternummern und die Dicken der Probeplatten aus Abb. 4 entnommen werden. Die dargestellten Kurvenzüge entsprechen den folgenden sieben Proben:

1. Hochdruck-Polyäthylen älterer Produktion (abgek.: H.D., alt) dessen Probeplatte subjektiv als stark gelblich, grau und gut durchsichtig anzusprechen ist. Die gemessenen Werte betragen für den Farbstich $F = +0,383$ und für den Grauwert $G = 1,25$ (ohne Berücksichtigung von Korrekturen).

2. Hochdruck-Polyäthylen, neueres Produkt (abgek.: H.D., neu) weiß-bläulich, grau und gut durchsichtig, $F = +0,02$, $G = 1,08$.

3. Niederdruck-Polyäthylen nach ZIEGLER, Probeplatte abgeschreckt (abgek.: N.D.-Z., abgeschreckt), schwach gelblich, leicht grau, etwas durchsichtig, $F = +0,095$, $G = 0,475$.

4. Gleiches Produkt wie 3., jedoch Probeplatte getempert (N.D.-Z., getempert), schwach gelblich, leicht grau, wenig durchsichtig, $F = +0,087$, $G = 0,333$.

5. Niederdruck-Polyäthylen nach dem Philips-Verfahren (N.D.-Ph.), 0,5 mm dick, weiß, gut durchsichtig, $F = -0,011$, $G = 0,197$.

6. Wie 5., jedoch 1,07 mm dick (N.D.-Ph., 1,07 mm), weiß, schwach durchsichtig, $F = -0,009$, $G = 0,171$.

7. Wie 5., jedoch 1,7 mm dick (N.D.-Ph., 1,7 mm), weiß, undurchsichtig, $F = -0,004$, $G = 0,178$.

Aus Abb. 4 kann entnommen werden, daß der Einfluß des hinterlegten Weißstandards besonders beim Niederdruck-Polyäthylen hoher Dichte (N.D.-Ph.) recht deutlich zu erkennen ist. Die Dickenabhängigkeit fällt bereits beim Vergleich der ρ_w -Werte

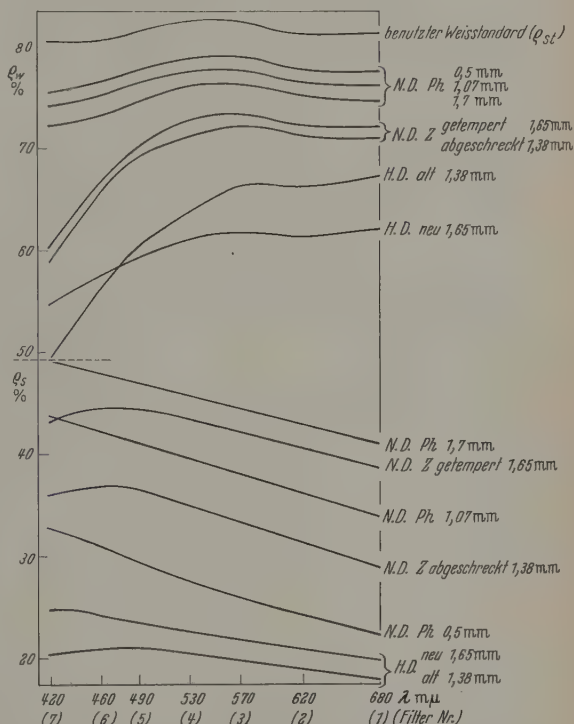


Abb. 4. ρ_s und ρ_w als Funktion von λ für verschiedene Polyäthylensorten

auf, sie kommt aber bei den ρ_s -Werten noch viel stärker zum Ausdruck. Vergleicht man die Meßwerte aus Abb. 4 — oder die Werte der Tabelle 1 von weiteren 6 Proben aus Ziegler-Polyäthylen — mit den subjektiven Angaben über ihr Aussehen, so kann man grob folgern: Ist ρ_s und ρ_w klein, so besitzen die Proben eine große Absorption; ist nur ρ_s klein und ρ_w groß, so ist eine gute Durchsichtigkeit bei geringer Absorption festzustellen; weiß und wenig durchsichtig ist eine Probe sicher dann, wenn ρ_s und ρ_w hoch sind. Bei einer lichtundurchlässigen Probe müssen ρ_s und ρ_w übereinstimmen.

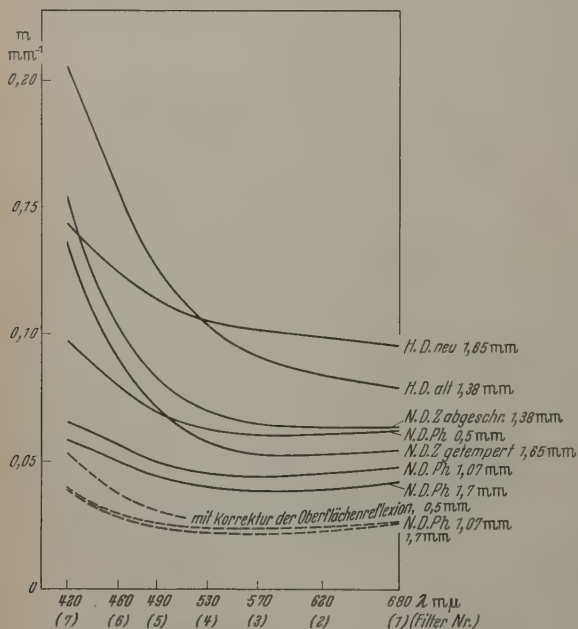
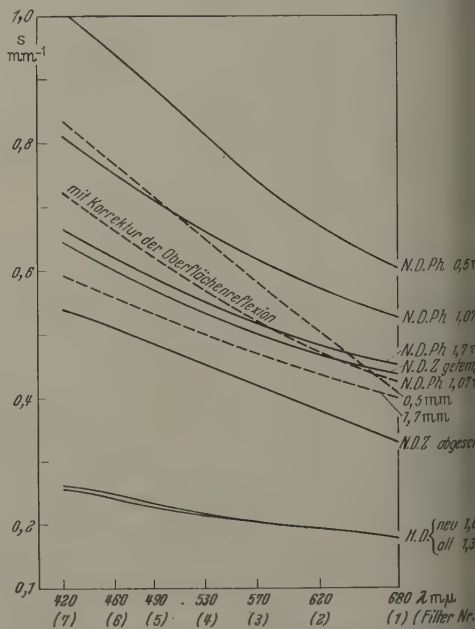
Die aus den Meßwerten ermittelten Koeffizienten m und s sind in den Abb. 5 und 6 als Funktion der Lichtwellenlänge dargestellt. Eine Dickenabhängigkeit sollte auf Grund der Theorie weder für m noch für s zu erwarten sein, doch geht aus Abb. 6 eindeutig hervor, daß bei allen untersuchten Proben aus Polyäthylen der Streukoeffizient fast linear mit kleiner werdender Wellenlänge zunimmt. Hält man eine solche Probe gegen das Tageslicht und betrachtet die

Tabelle 1. Meßwerte und Maßzahlen verschiedener Polyäthylenproben

Probe	Dicke [mm]	Filter Nr.	ϱ_w	ϱ_s	m [mm ⁻¹]	s [mm ⁻¹]	m/s	F	G
N.D.-Z., Typ „A“ sehr schwach, gelblich, nicht grau (weiß), nicht durchsichtig	1,30	1	0,762	0,386	0,041	0,525	0,078	+0,027	0,18
		7	0,716	0,450	0,075	0,73	0,105		
N.D.-Z., Typ „B“ gelbstichig, wenig grau, wenig durchsichtig	1,13	1	0,751	0,398	0,058	0,64	0,091	+0,181	0,36
		7	0,567	0,403	0,235	0,865	0,272		
N.D.-Z., Typ „C“ schwach gelblich, leicht grau, wenig durchsichtig	1,17	1	0,715	0,266	0,068	0,342	0,199	+0,111	0,50
		7	0,587	0,341	0,180	0,580	0,310		
N.D.-Z., Typ „D“ gelbstichig, schmutzig-grau, gut durchsichtig	1,4	1	0,664	0,211	0,0835	0,220	0,380	+0,201	0,90
		7	0,489	0,275	0,230	0,396	0,581		
N.D.-Z., Typ „E“ wenig gelbstichig, grau, schwach durchsichtig	1,22	1	0,675	0,276	0,094	0,36	0,261	+0,135	0,63
		7	0,537	0,331	0,228	0,575	0,396		
N.D.-Z., Typ „F“ schwach gelblich, schmutzig-grau, gut durchsichtig	0,93	1	0,635	0,186	0,15	0,29	0,518	+0,067	1,10
		7	0,517	0,254	0,296	0,505	0,585		

Probe in Durchsicht, so erscheint sie mehr oder weniger rötlich. Die stärkere Absorption bei kurzen Wellenlängen (s. hierzu Abb. 5) kann hierfür allein

relativ kleineren Streukoeffizienten aufweisen dünnere Proben aus dem gleichen Material (s. hierzu die Abb. 5 und 6). Der Unterschied von

Abb. 5. m als Funktion von λ für verschiedene PolyäthylensortenAbb. 6. s als Funktion von λ für verschiedene Polyäthylensorten

nicht verantwortlich sein. Das rötliche Aussehen der Probe bei Durchsicht dürfte vielmehr darauf zurückzuführen sein, daß nach jeder Streuung die Wellenlänge zum Rot hin verschoben wird. Da nun bei langwelligen Licht die Streuung geringer als bei kurzwelligerem Licht ist, werden dickere Proben auch immer einen

(und auch von m) für verschiedene Probendicken gleichen Grundstoffes zeigt diesen Gang so deutlich, daß die Herstellungsart der Probe oder die Vernachlässigung der Oberflächenreflexion hierfür nicht maßgebend sein dürfte. Würde man z.B. beim Niederdruck-Polyäthylen hoher Dichte bei der Berechnung

Tabelle 2. Meßwerte und Maßzahlen einer Aufhellungsreihe mit Titanweiß

Probe	Dicke [mm]	Filter Nr.	ϱ_w	ϱ_s	m [mm ⁻¹]	s [mm ⁻¹]	m/s	F	G
1, Typ „G“ + 0% bläulich, grau	1,15	1	0,683	0,262	0,085	0,348	0,244	— 0,072	0,416
		7	0,674	0,379	0,108	0,63	0,172		
3, Typ „G“ + 0,02% ig grau	1,2	1	0,682	0,372	0,103	0,584	0,174	+ 0,024	0,372
		7	0,623	0,426	0,161	0,815	0,198		
4, Typ „G“ + 0,1% schwach gelblich, wenig grau	1,2	1	0,742	0,496	0,069	0,94	0,074	+ 0,071	0,218
		7	0,639	0,504	0,171	1,18	0,145		
5, Typ „G“ + 0,2% ig grau	1,25	1	0,802	0,587	0,035	1,22	0,029	+ 0,058	0,116
		7	0,694	0,581	0,131	1,51	0,087		
6, Typ „G“ + 0,5% sehen fast wie weißes, iertes Porzellan	1,2	1	0,821	0,688	0,036	2,02	0,018	+ 0,073	0,109
		7	0,669	0,625	0,222	2,44	0,091		
7, Typ „G“ + 1,0% weißes, iertes Porzellan	1,25	1	0,840	0,774	0,044	3,38	0,013	+ 0,049	0,075
		7	0,708	0,690	0,236	3,8	0,062		

und s statt mit D etwa mit \sqrt{D} rechnen, so sich „Koeffizienten“ angeben, die von der Dicke unabhängig wären. Diese „Koeffizienten“ dann allerdings keine physikalisch sinnvolle Dimension mehr.

die Abb. 5 und 6 sind auch noch die Werte der verschieden dicken Proben aus Niederdruckpolyäthylen hoher Dichte (N.D.-Ph.) eingezeichnet, denen eine Oberflächenreflexion von $\varrho_s = 4\%$ beiliegend ist. Die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Wellenlänge wird durch die Korrektur beeinflusst, wenn sich auch die absolute Höhe der Werte ändert. Die Dickenabhängigkeit kann also die Berücksichtigung der Oberflächenreflexion „wegkorrigiert“ werden. Will man m oder s auswerten, so empfiehlt sich, die Probendicke m zu normieren.

er Theorie folgend, sollte eine Dickenabhängigkeit der Verhältnisse der Koeffizienten nicht mehr zu erwarten sein. Die in Abb. 7 dargestellten Kurven m/s gegen λ lassen jetzt auch keinen eindeutigen Verlauf mehr mit der Probendicke erkennen. Die Kurvenwerte von m/s verschieden dicker Proben gleichen Grundmaterials sind jetzt wohl auf unterschiedliche Prüfbedingungen bei der Probenherstellung zurückzuführen. Bei Berücksichtigung der Oberflächenreflexion rücken die Kurvenzüge verschieden dicker Proben des gleichen Grundmaterials noch enger zusammen. Hierbei verringern sich auch die Maßzahlen für den Farbstich und den Gauwert. Wir ordnen beispielsweise für die drei Proben aus Polyäthylen hoher Dichte mit $\varrho_s = 4\%$ folgende korrigierten Werte errechnen:

N.D.-Ph., 0,5 mm: $F = -0,006$; $G = 0,136$
N.D.-Ph., 1,07 mm: $F = -0,005$; $G = 0,119$
N.D.-Ph., 1,7 mm: $F = +0,002$; $G = 0,130$.

man kann noch aus Abb. 7 gefolgert werden: Je höher der absolute Wert von m/s ist, desto grauer erscheint eine Probe dem Auge. Eine in ihrem Absorptionsvermögen unveränderte Gerade würde einem weißen Material zuzuordnen sein, der je nach der absoluten Höhe

der Gerade mehr oder weniger grau erscheint; je stärker aber der Kurvenzug schräg oder durchgebogen ist, desto stärker wird der Eindruck eines Farbstiches sein.

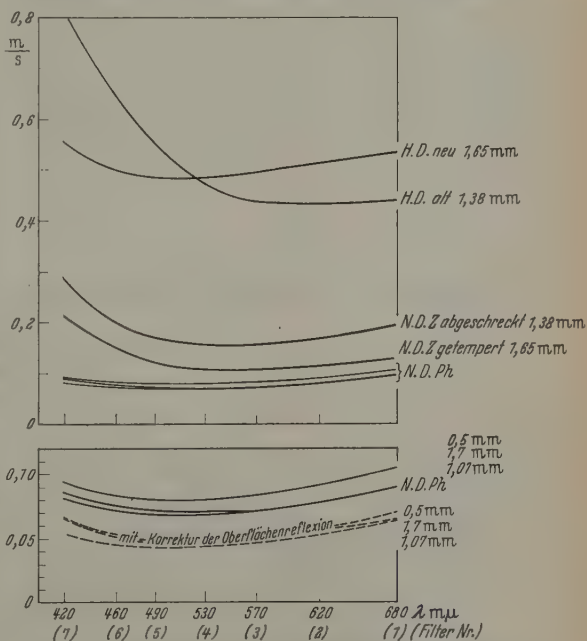


Abb. 7. m/s als Funktion von λ für verschiedene Polyäthylensorten

Die Gewinnung der Maßzahlen für Farbstich und Gauwert aus Messungen bei Filter 1 und Filter 7 ist für Polyäthylensorten sicher gerechtfertigt, da der typische Kurvenverlauf der m/s -Verhältnisse über der Wellenlänge bei allen Sorten vergleichbar ist.

Bei andersartigen teilkristallinen Stoffen müssen gegebenenfalls andere Wellenlängen zur Ermittlung von Maßzahlen herangezogen werden.

In Tabelle 2 sind Meßwerte und Maßzahlen für eine Aufhellungsreihe mit Titanweiß aufgeführt. Das

Ausgangsprodukt — ein Niederdruck-Polyäthylen nach dem Ziegler-Verfahren — hat ohne Aufheller einen geringen Blaustich und einen eindeutig feststellbaren Grauwert. Die Zugabe von Titanweiß läßt mit steigendem prozentualen Anteil den Grauwert stark abnehmen, denn die vermehrten Streuzentren setzen die Eindringtiefe des Lichtes herab. Das Auge empfindet deshalb auch den Farbstich nicht mehr so stark.

Obwohl die Theorie von KUBELKA und MUNK nur für ideal streuende Stoffe gilt, und sich nicht alle ungefärbten bzw. nichtaufgehellten Kunststoffe ideal verhalten, können auf der Grundlage dieser Theorie doch Maßzahlen für Farbstich und Grauwert gewonnen werden, die den subjektiven Eindruck eines Begutachters durch objektive Zahlenangaben ersetzen können. Auch die Maßzahlen von zwei als fast gleichartig anzusehenden Proben sind genügend differenziert. Beobachtete streuende Meßwerte bei verschiedenen Proben aus dem gleichen Grundmaterial beruhen weniger auf dem optischen Meßverfahren, als vielmehr auf den Herstellungsbedingungen der Probenplatten. Die einwandfreie Probenbereitung — sicherlich der aus Polyäthylen — hat man bis jetzt noch nicht ganz sicher in der Hand.

Für innerbetriebliche Messungen ist eine Korrektur durch den geringen Reflexionsgrad des benutzten schwarzen Samtes dann unnötig, wenn der Reflexionsgrad gering ist und vor allem nicht schwankt. Ähnliches gilt auch für die Berücksichtigung der Oberflächenreflexion, die bei dem gleichen Grundstoff dann gleich sein wird, wenn Proben mit gleichartiger Oberfläche gemessen werden. Aus Proben des gleichen Ausgangsmaterials mit einmal rauher und einmal

glatter (glänzender) Oberfläche darf nicht auf Grundmaterial rückgeschlossen werden.

Zusammenfassung

Aus den Differentialgleichungen von KUBELKA und MUNK werden mit den entsprechenden Randbedingungen ein Extinktionsmodul (= Absorptionskoeffizient) und ein Streukoeffizient erhalten. In den Verhältnissen von Absorptions- zu Streukoeffizienten bei zwei verschiedenen Lichtwellenlängen (rot und blau) lassen sich Maßzahlen für den „Farbstich“ und den „Grauwert“ gewinnen.

Die Messungen werden mit einem Remissionsphotometer durchgeführt, das die Messung des Reflexionsgrades bei zwei verschiedenen Hinterlegungen Lichtwellenlängen gestattet. Polyäthylenproben verschiedener Herkunft wurden gemessen, und die berechneten Maßzahlen für Grauwert und Farbstich werden ausgewertet.

Herrn Dr. REULE von der Firma Carl Zeiss, Jena (Wtbg.), danke ich recht herzlich für wertvollen Hinweise.

Der Firma Ruhrchemie A.G., Oberhausen-Hörmann bin ich für das zur Verfügung gestellte Material und die zur Durchführung der Arbeit gewährte Unterstützung dank verpflichtet.

Literatur: [1] KUBELKA, P., u. F. MUNK: Z. techn. Phys. 18, 137 (1937). — [2] KORTUM, G., u. H. SCHÖTTLE: Elektrochem. 57, 353 (1953). — [3] SCHREYER, G.: Z. Chem., N.F. 12, 359 (1957).

Dr. REINHARD HUBER,
Ruhrchemie AG., Oberhausen-Hörmann
jetzige Anschrift des Verfassers
Hüttenwerk Salzgitter AG., Salzgitter

Herstellung monochromatischer Röntgenstrahlung beliebiger Frequenz aus dem Bremsspektrum

VON HEINZ KUDIELKA und HERMANN MÖLLER

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 26. Mai 1960)

Die Beschränkung der monochromatischen Röntgenstrahlung auf die Eigenfrequenzen des Antikathodenmaterials ist für viele Untersuchungsaufgaben sehr störend und wird durch den Ausfall der schwachen Emissionslinien und durch die beim Elektronenbeschuß im Hochvakuum an die Antikathode gestellten Forderungen weiter verschärft; im gleichen Sinne wirken verarbeitungstechnische Schwierigkeiten bei der Herstellung der Anode.

Da beliebige Röntgenfrequenzen nur aus dem Bremsspektrum zu erhalten sind, wurde durch Berechnung und Versuch geprüft, ob durch Monochromatisierung ein Frequenzband genügender Intensität ausgesondert werden kann, dessen Breite mit der von Eigenstrahlungen vergleichbar ist. Die Verwendung eines ebenen Monochromators erscheint dafür unzureichend, da die Divergenz des Röntgenstrahls $d\theta$ bei feststehendem Monochromator einen ziemlich

breiten Wellenlängenbereich gemäß

$$d \ln \lambda = \cotg \theta \, d\theta$$

reflektiert. Das Verhältnis der Wellenlängen des weichsten und härtesten gebeugten Strahls λ_{\min} und λ_{\max} dann z.B. bei einem Einfallswinkel von $13,3^\circ$ in einen in der Winkelhalbierenden des divergierenden Strahlenbündels verlaufenden Wellenzug den λ_{\min} bei einer Divergenz von 3° . Zur Einengung des reflektierten Frequenzbereiches auf die Grenze Wellenlängen der $\text{Cu K}\alpha_1$ - und $\text{Cu K}\alpha_2$ -Strahlung ($\lambda_{\text{Cu K}\alpha_1} : \lambda_{\text{Cu K}\alpha_2} = 1,0025$) müßte demnach die Divergenz auf etwa $0,03^\circ$ verringert werden, was jedoch Intensitätsabfall von zwei Zehnerpotenzen mit sich brächte. Die Intensitätsausbeute läßt sich entsprechend erhöhen, wenn ein gebogener und ausgerechneter Präzisionsmonochromator nach dem Prinzip von JOHANNSSON [1] Verwendung findet. Außer der Intensitätsausbeute sind Monochromatisierungsgrad und Brennlinsenbreite wichtig, welche rechnerisch und experimentell untersucht wurden.

* Glanzwinkel der (1011)-Ebene von Quarz für $\text{Cu K}\alpha$ -Strahlung.

Die Rechnung ergibt (Tabelle 3), daß von der Breite des Röhrenbrennflecks bei voller Ausleuchtung des Monochromators nur 0,174 mm ausgenutzt werden; die zugehörige Brennlinienbreite beträgt 0,054 mm. Die angenommene Linienbreite von 0,46 X.E., die der von L. G. PARRATT [2] angegebenen „wahren“

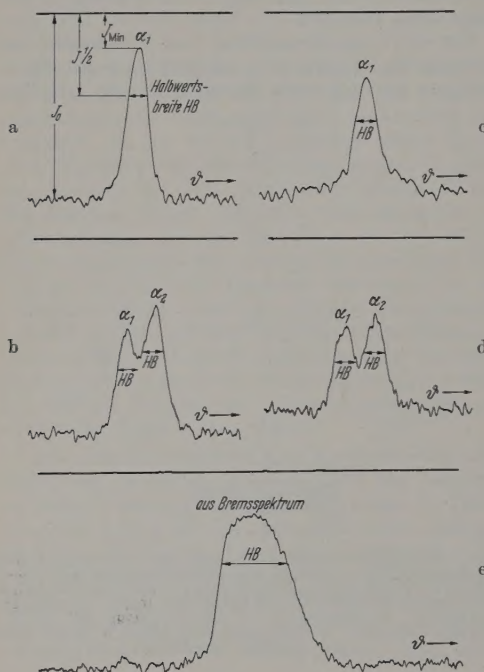


Abb. 2a-e. Photometerkurven der Fokallinien, verkleinert im Verhältnis 4:10 (Photometerübersetzung 100:1). a Optischer Brennfleck 4 · 0,04 mm; Strahlung: Cu K α_1 . b Optischer Brennfleck 4 · 0,04 mm; Strahlung: Cu K α_1 + Cu K α_2 . c Optischer Brennfleck 10 · 0,1 mm; Strahlung: Cu K α_1 . d Optischer Brennfleck 10 · 0,1 mm; Strahlung: Cu K α_1 + Cu K α_2 . e Optischer Brennfleck 10 · 0,1 mm; Strahlung: aus Bremspektrum

Linienbreite für Cu K α_1 -Strahlung entspricht, bringt eine zusätzliche Verbreiterung, die sich aus Tabelle 1 mit 0,030 mm ermitteln läßt und zu einer gesamten Halbwertsbreite von 0,084 mm führt.

Tabelle 3. Reflexion einer vom Röhrenbrennfleck F'F'' ausgesandten streng monochromatischen Welle ($\lambda = 1553,99$ X.E.)

Monochromator			Anode		Film
x_F	y_F	Strahlen-austritts-winkel aus Anode	x_F	y_F	s [mm]
-15	-315,6438	8,7764°	-81,029		+0,029
-12	-315,7721	8,5057°	-81,021		+0,023
-9	-315,8718	8,2350°	-81,013		+0,017
-6	-315,9431	7,9644°	-81,002		+0,011
-3	-315,9858	7,6940°	-80,988		+0,005
0	-316,0000	7,4235°	-80,972		0
+3	-315,9858	7,1530°	-80,955		-0,005
+6	-315,9431	6,8824°	-80,936		-0,011
+9	-315,8718	6,6119°	-80,912		-0,016
+12	-315,7721	6,3413°	-80,885		-0,021
+15	-315,6438	6,0705°	-80,855		-0,025

Für die Monochromatisierungsversuche wurde — wie bereits erwähnt — ein fokussierender Mono-

chromator benutzt. Die verwendeten Röhren hatten Brennflecke von 10×1 (Normalfokus) bzw. $10 \times 0,4$ mm (Feinfokus). Zur Ermittlung der Schärfe einer Emissionslinie wurde der Monochromator vor einem Kupferrohr mit Normalfokus auf die Cu K α_1 -Linie einjustiert und der Brennfleck aufgenommen (Abb. 2c). gleicher Art wurde die Brennlinie einer Feinfokusröhre ermittelt (Abb. 2a). Die Aufnahmen des Brennflecks wurden photometriert, wobei eine Einstellgewählt wurde, bei der die Photometerdiagramme gegenüber den Filmen 100fach vergrößert waren. Die Photometerdiagramme sind in Abb. 2 im Verhältnis 4:10 verkleinert wiedergegeben. Die Halbwertsbreiten HB in Abb. 2 liegen nicht auf halber Höhe, da die Ordinaten nicht der Extinktion, sondern unmittelbar den vom Film durchgelassenen Intensitäten entsprechen, so daß die der Halbwertsbreite zugehörige Ordinate $J_{\frac{1}{2}}$ das geometrische Mittel von minimaler (J_{\min}) und maximaler (J_0) Intensität darstellt entsprechend (s. auch Abb. 2a):

$$J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{J_{\min} \cdot J_0}.$$

Bei einem Vergleich der Cu K α_1 -Linien, die mit dem Feinfokus (Abb. 2a) und dem Normalfokus (Abb. 2c) erhalten wurden, fällt die nahezu gleiche Linienbreite auf, die aber nach der Berechnung zu erwarten ist, da bei voller Monochromatorausleuchtung ausgenutzte Breite des Röhrenbrennflecks mit 0,174 mm noch ganz erheblich unter der Breite des Feinfokus von 0,4 mm liegt. Größere Brennfleckbreiten führen offenbar zu einer Verbreiterung des Linienfußes durch Wellen des Bremspektrums, worauf besonders die Normalfokusaufnahme von Abb. 2c hindeutet.

Um experimentelle Angaben über die Dispersions des optischen Systems zu erhalten, wurden nach entsprechender Änderung der Monochromatoreinstellung Aufnahmen des Cu K α -Dubletts gleichfalls sowohl mittels der Normalfokus- (Abb. 2d) als auch mit der Feinfokusröhre (Abb. 2b) hergestellt. Das erhaltene Intensitätsverhältnis des Dubletts ist gegenüber dem Emissionsspektrum geändert, weil α_1 - und α_2 -Linie an Stellen des Röhrenbrennflecks mit verschiedener Leuchtdichte hinsichtlich der Cu K α -Strahlung aufgenommen. Deren Abstand beträgt nach (1), wenn der Strahlenaustrittswinkel gegen die Anodenoberfläche mit $\sim 7,4^\circ$ angenommen wird, etwa 0,36 mm. Die Verringerung der Brennfleckbreite erleichtert demnach die Trennung der beiden Dublettlinien, doch ist eine wesentliche Änderung der Form der Emissionslinie erst zu rechnen, wenn die Brennfleckbreite auf den Wert von 0,174 mm erreicht oder unterschreitet. Der Linienabstand von Cu K α_1 - und Cu K α_2 -Linie wurde nach (1) zu 0,12₃ mm errechnet.

Der im folgenden beschriebene Versuch zeigt, welchem Maße Monochromatisierung zu erzielen ist, wenn zwar die geometrische Fokussierungsbedingung erfüllt ist, aber die beugungsfähige Röntgenfrequenz nicht als Eigenstrahlung, sondern als Teil des Bremspektrums vorliegt. Nach der Justierung des Monochromators vor dem Kupferfeinfokusröhr wurde die gegen ein Molybdänrohr mit Normalfokus ausgetauscht in der Erwartung, daß der Brennfleck des Molybdänrohres an dieselbe Stelle zu liegen kommen werde wie vorher jener des Kupferrohres. In diesem Falle bleibt die Fokussierungsbedingung für e-

nlänge von der Größe der Cu $K\alpha$ -Strahlung er-
t wodurch die Schwierigkeiten des unmittelbaren
stierens für eine bestimmte Wellenlänge des
sspektrums umgangen waren. Beugungsauf-
en, auf die weiter unten näher eingegangen wird,
n kleine Wellenlängenänderungen gegenüber der
 $K\alpha_1$ -Strahlung nach, die auf eine beim Röhren-
sel unvermeidbare geringe Verschiebung des
bnflcks zurückgeführt werden. Die nun fest-
elte Form der Abbildung des Brennflecks zeigt
2e, an welcher vor allem die Asymmetrie auf-
ie läßt sich folgend erklären: Die Brennlinien-
n Δs , die jeweils von einem bestimmten Punkt
Monochromators allein herrühren, werden fast
om in F ausgehenden Strahl halbiert, weshalb
nzeln Teilintensitäten für sich keine merkbare

bei der Trennung beider Einflüsse zu überwinden sind.
In der vorliegenden Arbeit wurde für die Eigenstrahlung
als berechnete Linienbreite die Halbwertsbreite an-
gegeben, hingegen bei der monochromatisierten Brems-
strahlung die Breite am Linienfuße. Die Vermessung
der letzteren ist zwar mit wesentlich größeren Fehlern
behaftet, doch sind andererseits für die Berechnung
keinerlei Annahmen über die Verteilung der emittierten
Strahlungsintensität über den Brennfleck erforderlich.
Die Ergebnisse der Berechnungen sind zusammenfas-
send in den Tabellen 4 und 5 dargestellt und zeigen
völlig zufriedenstellende Übereinstimmung mit der
Beobachtung (Abb. 2).

Die Wellenlänge des Maximums wurde mit einer
Guinier-Kammer nach G. HOFMANN und H. JAGOD-
ZINSKI [7] durch eine asymmetrische Aufnahme



a—c. Asymmetrische Guinier-Aufnahmen von TiCl_3 , verkleinert im Verhältnis 7:10 (Subtraktionsstellung unter 45° , optischer Brennfleck des
jeweils $10 \cdot 0,1$ mm) mit a monochromatisierter Bremsstrahlung; $\lambda \approx \text{Cu } K\alpha$ -Strahlung 15 kV, 30 mA, 56,6 Std; Mo-Anode; b Cu $K\alpha_1$ -Eigen-
strahlung; 30 kV, 12 mA, 1 Std; c monochromatisierter Bremsstrahlung; $\lambda \approx \text{Fe } K\beta$ -Strahlung; außerdem doppelte und dreifache Frequenz; 40 kV,
20 mA, 117 Std; Mo-Anode

metrie besitzen; es führt aber deren Überlage-
ung zu einer asymmetrischen Brennfleckform, da die
nen der Teilintensitäten mit zunehmendem Ab-
stand des reflektierenden Monochromatorkpunktes

(45° , Subtraktionsstellung) von TiCl_3 (Abb. 3a) zu
 $1554 \pm 1,5$ X.E. ermittelt. Abb. 3b zeigt zum Ver-
gleich eine Aufnahme desselben Präparats mit
Cu $K\alpha_1$ -Eigenstrahlung; in beiden Fällen wurden

Table 4. Die Linienbreite* der monochromatisierten Brems-
strahlung

	Δs [mm]	$\Delta \lambda$ [X.E.]	Vgl. mit
Brennfleck: punktförmig Monochromator: voll ausgeleuchtet	0,110	1,68	Tabelle 1
Brennfleck: Breite 1 mm Monochromator: punktförmig ($p = -15$ mm)	0,513	14,88	Tabelle 2
Brennfleck: Breite 1 mm Monochromator: voll ausgeleuchtet	0,622*	16,65	Abb. 2e sowie 2b und 2d

Breite des Linienfußes (für einen Strahlenaustrittswinkel
an die Anodenoberfläche von $7,4235^\circ$); mit dem von den
ellern für die Röhre angegebenen Winkel von etwa $5,7^\circ$
die rechnerische Abschätzung auf 0,50 mm.

Röhrenbrennfleck stark abnehmen und sich
nzeitig zu kleinerem Glanzwinkel hin verschieben.
ntersuchungen über die Entstehung von be-
chteten Linienformen [3] bis [6] durch Über-
gung der wahren Breiten der Emissionslinien mit
Reflexionskurven der Monochromatorkristalle
en die erheblichen Schwierigkeiten erkennen, die

Tabelle 5. Linienbreite* und -abstand im Cu $K\alpha$ -Dublett

	Δs [mm]	$\Delta \lambda$ [X.E.]	Vgl. mit
Streng monochromatische Strahlung	0,054	$\equiv 0$	Tabelle 3
Berücksichtigung der Halbwertsbreite	0,030	0,46	Tabelle 1
Cu $K\alpha_1$ -Linie	0,084*	0,46	Abb. 2a und 2c
Cu $K\alpha_1$ —Cu $K\alpha_2$	0,12 ₃	3,83	Abb. 2b und 2d

* Halbwertsbreite.

Röhren mit Normalfokus verwendet. — Der Film in
Abb. 3c wurde ebenfalls mit monochromatisierter
Bremsstrahlung erhalten, doch liegt deren Wellen-
länge nahe jener der $\text{Fe } K\beta$ -Strahlung, die zur Justie-
rung Verwendung fand. Die Röhrenspannung lag
hier aber mit 40 kV über der Anregungsspannung von
 $\frac{1}{3} \lambda_{\text{Fe } K\beta}$, so daß neben den im wesentlichen von $\frac{1}{3} \lambda_{\text{Fe } K\beta}$
stammenden Reflexen bei kleinen Glanzwinkeln
Interferenzen zu erkennen sind, die von $\frac{1}{3} \lambda_{\text{Fe } K\beta}$ her-
rühren. Die Belichtungszeiten sind zwar für die mit
monochromatisierter Bremsstrahlung hergestellten
Aufnahmen mit 56,5 und 117 Std erheblich, aber
es lassen sich die Intensitäten bei gleichbleibender

elektrischer Röhrenleistung durch Verwendung einer Wolframanode um mehr als 70% steigern und bei Benutzung einer Drehanode kann mit einem Vielfachen an Strahlungsintensität gerechnet werden.

Die geschilderten Versuche und Berechnungen zeigen, daß nach dem genannten Prinzip aus dem Bremsspektrum beliebige Wellenlängen soweit monochromatisiert werden können, daß sie z. B. zur systematischen Untersuchung von Absorptions- und Beugungsverhalten geeignet sind und daß auch erweiterte Anwendungen für das Rückstrahlverfahren, z. B. für Gitterkonstantenbestimmungen, möglich erscheinen. Durch Verwendung eines exakt fokussierenden Kristalls (Punkt A von Abb. 1 am Fokussierungskreis) und eines schmäleren Röhrenbrennflecks ist eine schärfere Monochromatisierung zu erwarten. Schwierigkeiten können durch die gleichzeitige Reflexion von Obertönen am Monochromator (s. Abb. 2c) entstehen, doch lassen sich die energiereicheren Wellen durch entsprechendes Herabsetzen der Röhrenspannung unterdrücken. Diese Möglichkeit wird allerdings bei abnehmender Spannung durch den Durchgriff der Röhre und die Abnahme der Strahlungsintensität begrenzt. Eine sehr vorteilhafte Ergänzung für die Trennung von Obertönen bietet sich bei der Registrierung mittels eines Proportionalzählrohres unter Verwendung eines

Diskriminators. A. R. LANG [8], [9] zeigte, daß in diesem Verfahren eine vollkommene Trennung Cu $K\alpha$ -Strahlung von ihrem ersten Oberton möglich

Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren beschrieben, nach dem Hilfe eines fokussierenden Monochromators grundsätzlich Röntgenstrahlung beliebiger Wellenlänge dem Bremsspektrum erhalten werden kann, Intensität und Monochromasie zur Herstellung Beugungsaufnahmen ausreicht. Das Ausmaß erreichten Monochromatisierung wird erläutert. — berechnete Breite der Brennlinie stimmt mit der beobachtung überein.

Literatur: [1] JOHANSSON, T.: Z. Physik 82, 507 (1933). [2] PARRATT, L. G.: Phys. Rev. 50, 1 (1936). — [3] STRÖM, A. E.: Ark. Fysik 8, 129 (1954). — [4] SANDSTROM, A. E.: In Handbuch der Physik, Bd. 30, S. 153. B. Springer 1957. — [5] PARRATT, L. G.: Rev. Sci. Instrum. 387 (1935). — [6] BROGREN, G.: Ark. Fysik 8, 391 (1954). [7] HOFMANN, E., u. H. JAGODZINSKI: Z. Metallkde. 46 (1955). — [8] LANG, A. R.: Nature, Lond. 168, 907 (1951). [9] LANG, A. R.: Proc. Phys. Soc. Lond. A 65, 372 (1954). — ARNDT, U. W., and D. P. RILEY: Proc. Phys. Soc. Lond. A 65, 74 (1952).

Dr. HEINZ KUDIELKA und Dr. HERMANN MÖLLE
Max-Planck-Institut für Eisenforschung, Düsseldorf

Buchbesprechungen

Holland, L.: Vacuum Deposition of Thin Films. London: Chapman & Hall Ltd. 1958. 541 S. u. zahlr. Abb. Geb. 70 s.

Das mit einem Vorwort von S. TOLANSKY eingeleitete Buch enthält eine reichhaltige Zusammenstellung experimenteller Probleme, die bei der Herstellung dünner Schichten im Vakuum auftreten. Seit der ersten Vakuumbedampfung durch POHL und PRINGSHEIM im Jahre 1912 hat diese Methode vor allem in neuerer Zeit auf breiter Basis Anwendung in Wissenschaft und Technik gefunden. Nach vakuumtechnischen Fragen und Ausführungen über Verdampferquellen, Reinigung der Schichtträger und dergleichen Probleme werden beim Aufdampfen bestimmter Substanzen gewonnene Erfahrungen mitgeteilt. Der Kathodenzerstäubung ist ein eigenes Kapitel gewidmet. Obwohl die Literatur nur bis 1956 berücksichtigt ist, kann das grundlegende Werk allen bestens empfohlen werden, die auf dem behandelten Gebiet experimentell tätig sind. In eine Neuauflage sollte, wenn noch ein Wunsch gestattet ist, ein Hinweis auf die zu so außerordentlichen Resultaten führende Methode der abschreckenden Kondensation von HILSCH aufgenommen werden.

W. WAIDELICH

Szabó, I.: Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960. 273 S. u. 254 Abb. Geb. DM 24.—.

Man lernt die Technische Mechanik am schnellsten beherrschen, wenn man nach einer Unterweisung in den theoretischen Grundsätzen der allgemeinen Mechanik eine sinnvoll ausgewählte Reihe von Aufgaben selbstständig bis zum numerischen Endergebnis durchrechnet. Diesen beiden ausgesprochenen Zwecken dient das Buch. Es umfaßt den Stoff aus der Statik starrer Körper, der Festigkeitslehre und Deformationstheorie elastischer Tragwerke, der Kinematik und Kinetik

sowie der Dynamik der Flüssigkeiten und Gase. Die Ausarbeitung der Erläuterungen, der Übungsbeispiele und illustrierten Zeichnungen ist wohl durchdacht, so daß derjenige, der mit dem Stoff intensiv und aktiv beschäftigt, am Schluss ein tiefes Wissen und Können nicht nur der elementaren sondern mit auch noch der höheren Mechanik besitzt. Buch stellt eine wohlgeplante und gleichrangige Ergänzung der beiden Mechanikbücher seines Verfassers dar.

H. ST. STEFAN

Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. Dritte erweiterte, neubearbeitete Aufl., 603 S., 374 Bilder. Karlsruhe: Braun 1959. Geb. DM 65.—.

Die neue Auflage enthält — im Umfange von 120 S. und 80 Bildern — eine Reihe von Ergänzungen und Bearbeitungen, welche die neuesten Ergebnisse in die Theorie der Grenzschichten einfließen lassen. Sie ändert beibehaltenen Rahmen insoweit berücksichtigt, als dem Verfasser, vom Standpunkt des Ingenieurs aus gesehen, notwendig erschienen: exakte Lösungen, Grenzschichtbeeinflussung, kompressible laminare Grenzschichten, Anwendungen der Stabilitätstheorie, Einfluß des Wärmeüberganges und der Kompressibilität auf den Umschlag, Gitterschichten mit positiven und negativen Druckgradienten.

Wenn innerhalb kurzer Zeit die dritte Auflage — in einer Übersetzung ins Englische, die auch bald verfügbar dürfte, — eines umfangreichen Buches über einen so speziellen Gegenstand notwendig wurde, so zeigt dies einerseits die Bedeutung der Grenzschichten in der technischen Praxis und andererseits nach einem Lehrbuch darüber auf und andererseits für die — international anerkannte — Qualität der Darstellung und Ausstattung, so daß es keiner weiteren Empfehlung mehr bedarf.

H. STEFAN